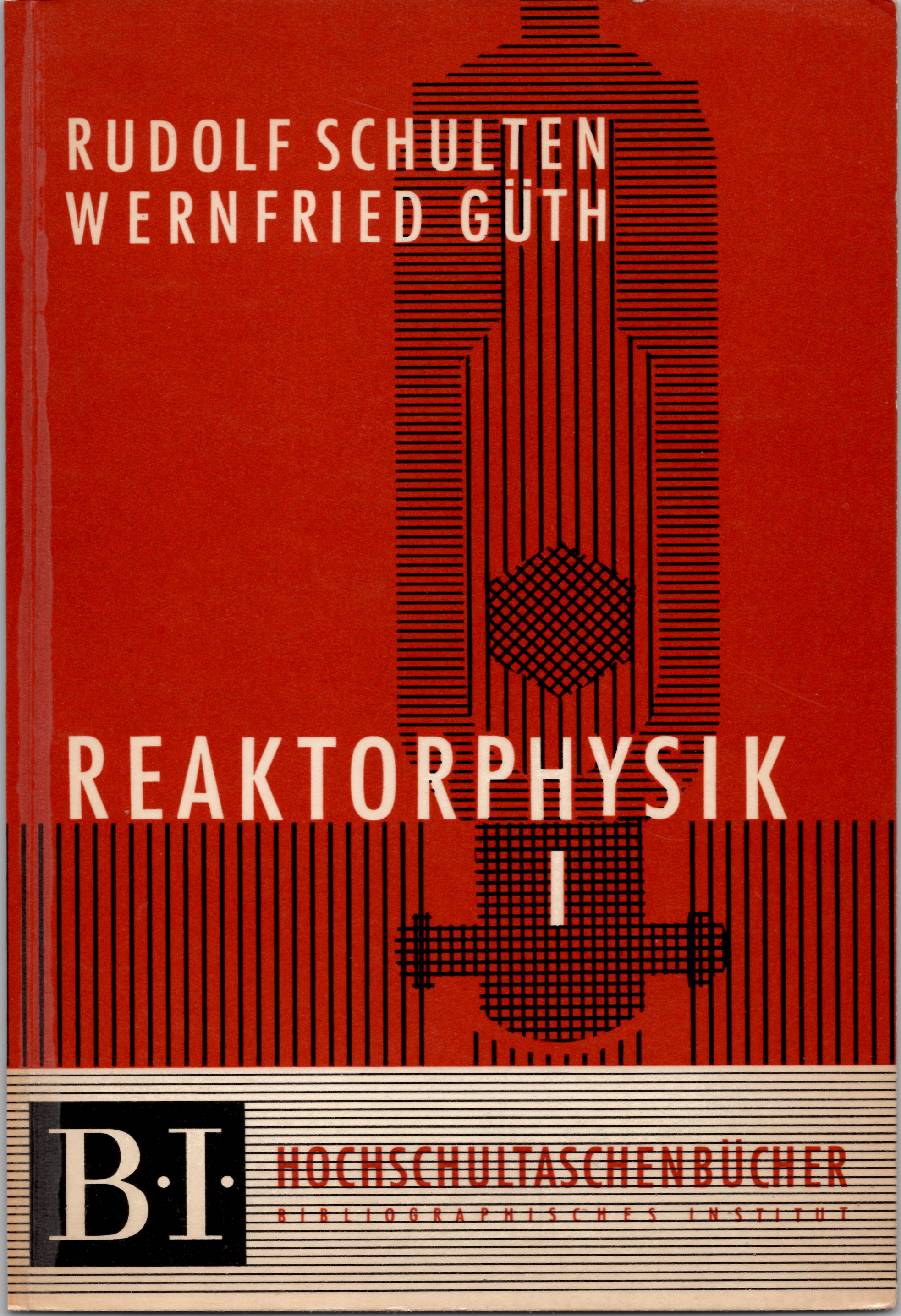


RUDOLF SCHULTEN
WERNFRIED GÜTH
REAKTORPHYSIK
I
B·I·
HOCHSCHULTASCHENBÜCHER
BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT

B·I-HOCHSCHULTASCHENBÜCHER

BAND 6

REAKTORPHYSIK

VON

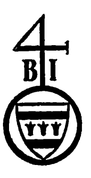
RUDOLF SCHULTEN UND WERNFRIED GÜTH

Arbeitsgemeinschaft BBC-Krupp

für Kernenergie-Anlagen

ERSTER BAND

DER REAKTOR IM STATIONÄREN BETRIEB



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

Gesamtherstellung: Klambt-Druck GmbH., Speyer
Druck: Zechnersche Buchdruckerei, Speyer
Printed in Germany
B

INHALT

Vorwort 7

I. Einleitende Übersicht 9
1. Der Aufbau der Atome 9
2. Reaktionen zwischen Kernen und Neutronen 20
3. Der Atomreaktor 35

II. Diffusions- und Bremstheorie 45
1. Der Wirkungsquerschnitt 45
2. Die Diffusionsgleichung für thermische Neutronen . . . 54
3. Die Abbremsung eines Neutrons als Einzelvorgang . . . 64
4. Die Abbremsung der Spaltungsneutronen 73
5. Die Diffusion der Neutronen im Abbremsbereich 83
6. Die Diffusionskonstante 90
7. Die mittlere Transportweglänge 95
8. Die Vierfaktorenformel für den homogenen Reaktor . . 96
9. Die Diffusionsgleichung 104
10. Berechnung eines homogenen Reaktors 116

III. Störungen der Homogenität des Reaktorcores 121
1. Räumliche Schwankungen des Krümmungsfaktors . . . 122
2. Der Temperatureffekt 126

IV. Der heterogene Reaktor 133
1. Der f-Faktor 136
2. Der p-Faktor 141
3. Der ε-Faktor 144
4. Die kritische Bedingung für den heterogenen Reaktor . . 147

V. Die Zweigruppentheorie 149
1. Die Reflektorrechnung nach der Zweigruppentheorie . . 152
2. Behandlung eines zentralen Regelstabes mit der Zweigruppentheorie 161

Literaturverzeichnis 168

Sach- und Namenregister 169

VORWORT

Als wir im Anfang des Jahres 1956 den Plan faßten, ein deutsches Buch über Reaktorphysik und -technik zu schreiben, gab es in unserer Sprache so gut wie nichts über dieses Gebiet. Wohl aber waren englische Arbeiten bereits in großer Zahl zugänglich, und auch einige recht gute Lehrbücher waren vorhanden. Die deutsche Forschung auf dem Atomenergiebereich hatte bis dahin brach gelegen und begann eben erst wieder anzulaufen. Wollte man also ein deutsches Buch über Reaktorphysik schreiben, so blieb nur die Möglichkeit, den Wissensstoff ausländischer Lehrbücher in die deutsche Sprache zu übertragen, eine Aufgabe, die uns wenig reizvoll und auch nicht lohnend erschien, zumal die deutschen Physiker und Ingenieure sich bald an das Lesen englischer Literatur gewöhnt hatten und es vorzogen, die Dinge in der Originalsprache zu lesen.

Seit dieser Zeit hat sich manches geändert. Die deutsche Forschung auf dem Gebiet der Atomenergie hat den Vorsprung des Auslandes zum Teil eingeholt, und auch auf dem deutschen Büchermarkt erschienen in der Zwischenzeit zahlreiche umfassende Werke, so daß eine Nachfrage nach guter Fachliteratur kaum mehr besteht. Was aber, wie sich in Vorlesungen zeigte, zu fehlen scheint, ist eine kurze zusammenfassende Darstellung der physikalischen Vorgänge in Spaltungsreaktoren und Anleitung zu ihrer mathematischen Beschreibung. Damit hier eine Lücke geschlossen wurde, entstanden die vorliegenden zwei Bände „Reaktorphysik“.

Diese beiden Bändchen erheben nicht den Anspruch in der Reihe der Standardwerke zu stehen. Sie wollen lediglich dem Ingenieur, wie dem Physiker, eine Hilfe sein, der den Wunsch hat außer der

technischen Funktion eines Atomkraftwerkes auch die physikalischen Zusammenhänge zu verstehen und sie in der Formelsprache der Mathematik beschreiben zu können. Dabei haben wir uns bemüht, aus dem großen Gebiet der Reaktorphysik die Bereiche herauszugreifen, denen eine grundsätzliche Bedeutung zukommt und sie so darzustellen, daß ihr prinzipieller Inhalt zutage tritt und nicht, wie es allzuleicht geschieht, in mathematischem Formalismus versinkt. Die Mathematik wurde dort zu Hilfe genommen, wo wir glaubten, daß sie das Verständnis der physikalischen Zusammenhänge vertiefen oder erleichtern könnte, und fortgelassen, wo sie es nur verdunkelt hätte.

Da es uns darum geht die Prinzipien dieses Wissensgebietes zu erläutern, haben wir darauf verzichtet, auf Spezialprobleme einzugehen. Auch enthält das Buch keine ins einzelne gehenden Tabellen oder Meßwerte. Solche findet der Leser in der Spezialliteratur, über die wir ein Verzeichnis am Schluß jedes Bändchens angeben.

Das erste der beiden Bändchen beschreibt im wesentlichen das physikalische Geschehen in einem stationär arbeitendem Reaktor, die Reaktionen zwischen Neutronen und Atomkernen, Neutronendiffusionsprobleme usw. Der zweite Teil enthält die Darstellung des zeitlichen Verhaltens von Reaktoren, Reaktivitätsschwankungen durch Vergiftung, Regelprobleme, das Brut- und Korrosionsverhalten usw. Zum Schluß wird in gedrängter Form das mathematische Rüstzeug des Reaktorphysikers bzw. -ingenieurs zusammengestellt.

Unser besonderer Dank gilt Frau Ott und Frau Eggert, die uns bei der Fertigstellung des Manuskriptes behilflich waren, sowie Herrn Dr. Stürmer und Herrn Dipl.-Ing. Setzwein für ihre wertvolle Kritik beim Korrekturlesen.

Mannheim, Januar 1960

R. Schulten W. Güth
Arbeitsgemeinschaft BBC-Krupp
für Kernenergie-Anlagen

I. EINLEITENDE ÜBERSICHT

1. Der Aufbau der Atome

a) Das Rutherfordsche und das Bohrsche Atommodell

Unter zahlreichen Modellvorschlägen für den Aufbau der Atome schuf als erster Rutherford ein Atommodell, das bis heute seiner Anschaulichkeit wegen am häufigsten zur Beschreibung der Vorgänge innerhalb der Atome verwendet wird.
Nach diesem Modell enthält ein Atom einen Kern, um den Elektronen kreisen. Rutherford konnte auf Grund von Streuversuchen bereits die Größenordnung der Atomdurchmesser angeben: Der Durchmesser der Atomkerne hat die Größenordnung 10^{-12} cm, der des ganzen Atoms, also einschließlich der den Kern umgebenden Elektronen, der sogenannten Elektronenhülle, hat die Größenordnung 10^{-8} cm. Der Durchmesser der Elektronenhülle ist somit etwa 10000mal so groß wie der des Kerns. Die Atome sind nach außen hin im allgemeinen elektrisch neutral, die Elektronen aber stets negativ geladen, deshalb nahm Rutherford an, daß der Atomkern eine positive Ladung trägt, die dem Betrage nach ebenso groß ist wie die Gesamtladung aller den Kern umgebenden Elektronen.
Bohr vervollständigte das Rutherfordsche Modell durch die Vermutung, daß die Elektronen nur auf vorgeschriebenen Bahnen bestimmten Energieinhaltes kreisen und daß die Wechselwirkung mit elektromagnetischer Strahlung durch Übergänge der Elektronen zwischen den verschiedenen möglichen Bahnen beschreibbar sind. Das Gesetz dieser Wechselwirkung gab er an zu

$$h\nu = E_1 - E_2 \qquad \text{(I, 1)}$$

h ist das Plancksche Wirkungsquantum und ν die Frequenz der Strahlung, mit der das Atom in Wechselwirkung steht. E_1 und

E_2 sind für ein Elektron mögliche Energiestufen (Energieniveaus).

Alle chemischen Vorgänge, dazu gehört auch die Verbrennung von Kohle, Öl usw., auf der die bisher üblichen Arten der Wärmeenergieerzeugung beruhen, verändern die äußere Elektronenhülle der Atome. Der Energieumsatz je Atom ist dabei in der Größenordnung der oben erwähnten Energiestufenänderung, im allgemeinen einige Elektronenvolt[1].

Sehr viel mehr Energie wird bei Reaktionen in Atom*kernen* umgesetzt. Nur von dieser Art der Energieerzeugung soll im weiteren die Rede sein. Wir können deshalb auf eine ausführliche Beschreibung der Elektronenhülle verzichten und wenden uns den Atomkernen zu.

b) Der Aufbau des Atomkerns

Wiederum war Rutherford der eigentliche Begründer der Atom*kern*physik, da es ihm als erstem gelang, Teile von Atomkernen abzuspalten und dadurch nachzuweisen, daß der Atomkern aus mehreren Bestandteilen zusammengesetzt ist.

Über den Atomkern haben wir heute folgende Vorstellung. Die kleinsten Bausteine der Atomkerne sind die sogenannten Nukleonen. Unter den Nukleonen unterscheidet man zwei Arten, die Protonen und die Neutronen. Aus diesen beiden sind alle Atomkerne aufgebaut, man rechnet sie zu den sogenannten Elementarteilchen. Die Elektronen hatten wir im Abschnitt a) als Bausteine der Atomhülle kennengelernt. Das Elektron gilt gleichfalls als Elementarteilchen. Es ist nicht zerlegbar, hat eine sehr kleine Masse ($m_e = 0{,}9108 \cdot 10^{-27}$ Gramm) und trägt die — ebenfalls nicht mehr teilbare — negative elektrische Elementarladung ($e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Coulomb).

Das Proton ist der Träger der positiven Ladung im Kern, und zwar ist seine Ladung genau gleich der eines Elektrons, nur mit umgekehrtem Vorzeichen. Das Proton trägt also eine positive Elementarladung. Aus der eingangs erwähnten elektrischen Neutralität der Atome folgt demnach, daß die Anzahl der Protonen im Kern gleich sein muß der Anzahl der den Kern

[1] Wegen der Energieeinheit Elektronenvolt siehe S. 24.

umkreisenden Elektronen. Die Anzahl der äußeren Elektronen kennt man aus dem chemischen Verhalten der Atome, und damit kennt man die Anzahl der Protonen im Kern des betreffenden Atoms.

Neutronen sind elektrisch ungeladene Elementarteilchen. Die Masse der Protonen sowie die der Neutronen ist ungefähr die gleiche. Das Neutron ist etwas schwerer als das Proton. Die Masse des Protons beträgt

(I, 2) $$\begin{cases} & m_p = 1{,}6727 \cdot 10^{-24}\ \text{Gramm}, \\ \text{die des Neutrons} & m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-24}\ \text{Gramm}. \end{cases}$$

Die Nukleonen sind also etwa 2000 mal so schwer wie die Elektronen. Das bedeutet also, daß die Masse eines Atoms nahezu völlig in seinem Kern konzentriert ist.

Es ist in der Kernphysik üblich, die Massen der Atome oder der Nukleonen nicht in Gramm, sondern in sogenannten Atomgewichten oder Massenwerten anzugeben. Der Bezugswert für diese Skala ist die Masse des Sauerstoffatoms, das das Atomgewicht und den Massenwert 16 erhält (sein Kern enthält normalerweise 16 Nukleonen). Das Nukleon hat also ungefähr den Massenwert 1.

Genau sind die Massenwerte

(I, 3) $$\begin{cases} \text{für das Proton} & M_P = 1{,}00758\ \text{ME} \\ \text{und für das Neutron} & M_N = 1{,}00897\ \text{ME}. \end{cases}$$

Die Abkürzung ME bedeutet „Masseneinheit", wobei eine Masseneinheit der 16. Teil des Massenwertes vom Sauerstoff ist.

Da man nun einerseits die Zahl der Protonen, die ein Kern enthält, aus der Zahl der Hüllenelektronen kennt, andererseits aber die Gesamtmasse der Atome bestimmen kann, kennt man auch die Anzahl der Neutronen im Kern. Bezeichnet man mit M die Massenzahl — das ist der auf die nächstliegende ganze Zahl abgerundete Massenwert — so daß z.B. die Massenzahl des Nukleons $M = 1$ wird, so ist die Massenzahl eines Atomkerns, der Z Protonen und N Neutronen enthält:

(I, 4) $$M = Z + N$$

M ist also die Anzahl der Nukleonen im Kern.

Es wurde oben gesagt, die Neutronen und die Protonen seien Elementarteilchen wie das Elektron. Das ist nur insofern richtig, als die Neutronen und Protonen die Elementarbausteine der Atomkerne sind; sie sind jedoch als solche nicht wie das Elektron unteilbar. Das Neutron kann zerfallen in ein Proton und ein Elektron, und das Proton in ein Neutron und ein Positron. Das Positron ist wieder ein neues, positiv geladenes Elementarteilchen, auf dessen Eigentümlichkeiten wir aber nicht weiter eingehen wollen.

Da das Neutron in ein Proton und ein Elektron zerlegbar ist, könnte man auch sagen, die Atomkerne bestehen aus Protonen und Elektronen. Das Neutron als neues Elementarteilchen könnte man dann sparen. In der Tat bestand diese Auffassung unter den Physikern auch lange Zeit, bis Bothe (1930) das Neutron als freies Teilchen entdeckte und Heisenberg bald darauf (1932) die Meinung aussprach, daß die Kerne primär aus Protonen und Neutronen aufgebaut seien und nicht aus Protonen und Elektronen. Die bis dahin geltende Auffassung hatte nämlich zu mancherlei Widersprüchen geführt, worunter der schwerwiegendste der war, daß die gemessenen magnetischen Kernmomente ganz anders waren, als sie bei einem Kernaufbau aus Protonen und freien Elektronen hätten sein müssen.

c) Isotopie

Nachdem wir die Protonen und Neutronen als die Kernbausteine kennengelernt haben, interessiert uns nun, in welchem Mengenverhältnis diese beiden Arten von Nukleonen in den in der Natur vorkommenden Atomkernen auftreten.

Ein eindeutiges Gesetz darüber gibt es nicht. Zwar gilt die Faustregel, daß die Anzahl der Protonen ungefähr gleich der der Neutronen ist, aber es gibt statistische Abweichungen von diesem Gesetz und auch eine systematische, die im folgenden noch besprochen wird. In der Abb. I, 1 ist dieser Tatbestand skizziert. Nach rechts ist die Zahl der Protonen Z, nach oben die der Neutronen N aufgetragen. In der durch Z und N aufgespannten Ebene sind die Elemente als Punkte eingezeichnet, die in der Natur als stabil, d.h. als in ihrer Art beständig gefunden werden. Bei $Z = 1$ und $N = 0$ liegt z.B. das einfachste Element, der Wasserstoff, dessen

Kern lediglich aus einem Proton besteht. Bei ihm gilt also die oben genannte Faustregel schon einmal nicht, wohl aber bei dem nächst einfachen Element, dem schweren Wasserstoff oder Deuterium. Sein Kern, das sogenannte Deuteron, besteht aus einem Proton und einem Neutron, erhält also in der Abb. I, 1 die

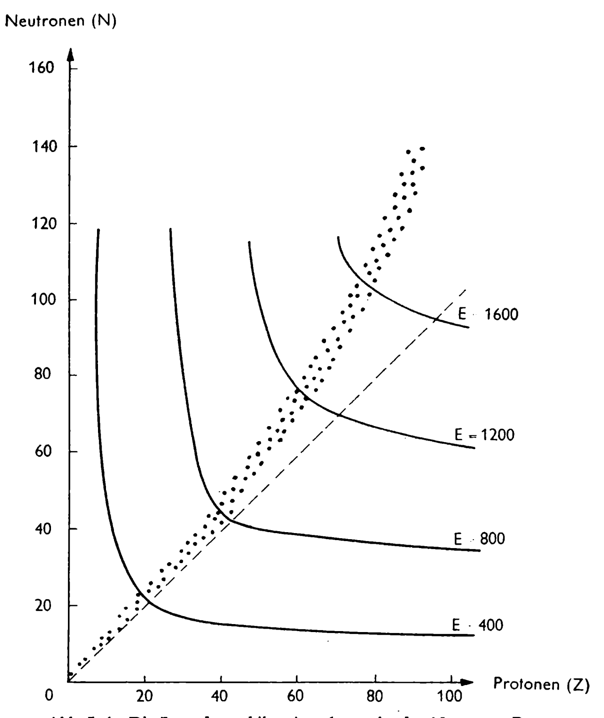


Abb. I, 1. Die Lage der stabilen Atomkerne in der Neutronen-Protonen-Ebene. Die hyperbelartigen Kurven als Höhenschichtlinien kennzeichnen die Energiefläche auf deren „Höhenrücken" die stabilen Kerne als Punkte (schematisch) aufgetragen sind

Koordinaten (1;1). Noch ein drittes Element mit einem Proton gibt es, das Tritium. Sein Kern enthält neben dem Proton noch zwei Neutronen.

Man sieht schon an diesen Beispielen, daß die Zuordnung zwischen der Zahl der Protonen und der der Neutronen für die verschiedenen Kerne nicht eindeutig ist. Man nennt Atome gleicher Protonen- aber verschiedener Neutronenzahlen, „Isotope" eines

Elementes. Zum Beispiel sind Deuterium und Tritium Isotope des Elementes Wasserstoff. Isotope eines Elementes unterscheiden sich nicht in ihrem chemischen Verhalten; denn sie haben ja die gleiche Anzahl Protonen, also auch die gleiche Anzahl Elektronen in der Hülle. Sie unterscheiden sich lediglich in ihrer Massenzahl, d.h. der Anzahl ihrer Nukleonen.
Auf den Wasserstoff folgt dann als nächst höheres Element das Helium, dessen Kern zwei Protonen und normalerweise zwei Neutronen enthält. Auch zum Helium gibt es mehrere Isotope.
Wegen der Nichteindeutigkeit der Protonen- und Neutronenzuordnung genügt es nicht, die Atomkerne durch chemische Symbole, wie H; He; N; U zu kennzeichnen, man muß noch die Anzahl der Neutronen, die der Kern enthält, angeben. In der Atomphysik ist es üblich, neben dem chemischen Symbol noch als Indizes die Anzahl der im Kern enthaltenen Nukleonen und — eigentlich überflüssigerweise — noch die Anzahl der Protonen anzugeben. Die erstere schreiben wir oben links, die letztere unten links an. So wird z.B. das Symbol für den gewöhnlichen Wasserstoff ${}^{1}_{1}H$, das für den schweren Wasserstoff ${}^{2}_{1}H$, für das normale Helium ${}^{4}_{2}He$. Die Anzahl der Neutronen ergibt sich nach der Gl. (I, 4) durch die Subtraktion des unteren vom oberen Index. Vielfach schreibt man auch die Anzahl der Nukleonen hinter den ausgeschriebenen Namen des Elementes, z.B. Helium-4; Uran-235 usw., oder als Index des chemischen Symbols unten rechts, z.B. U_{235}.

d) Kernkräfte und Kernenergie

Zwischen den Nukleonen im Kernverband sind im wesentlichen zwei Arten von Kräften wirksam. Die eine der beiden ist die Coulombsche Abstoßungskraft, die zwischen den gleichnamig geladenen Protonen wirkt. Diese Kraft ist bestrebt, den Kern zu sprengen. Es muß also noch weitere Kräfte geben, die, den Coulombschen Abstoßungskräften entgegenwirkend, den Kern zusammenhalten. Das sind Anziehungskräfte, die zwischen den einzelnen Nukleonen, gleichgültig ob Proton oder Neutron, wirken, über deren Wesensart aber noch wenig bekannt ist. Lediglich weiß man, daß diese Kräfte sehr stark, aber dafür nur von ganz kurzer Reichweite sind, so kurz, daß sie zwar von einem

Nukleon im Kern zum nächstbenachbarten Nukleon reichen, kaum aber über das nächste hinaus bis zum übernächsten. Mit Hilfe dieser Kräfte hält also jedes Nukleon nur seine Nachbarn fest, etwa wie in einem Haufen von Kletten jede einzelne Klette nur die unmittelbar benachbarten festzuhalten vermag, nicht aber die weiter entfernt liegenden.

Die entgegengesetzten Eigenschaften haben die Coulombschen Abstoßungskräfte. Sie sind wesentlich schwächer als die anziehenden Nukleonkräfte, haben aber dafür eine sehr viel größere Reichweite. Ihre Reichweite geht weit über den Kernbereich hinaus. Jedes Proton im Kern steht demnach unter dem Krafteinfluß aller anderen Protonen, die der Kern enthält.

Wir wollen uns noch, allerdings nicht mit Hilfe der Bindungs- und Abstoßungskräfte, sondern der entsprechenden Energien überlegen, wie die Gesamtbindungsenergie eines Atomkerns von der Anzahl der in ihm enthaltenen Nukleonen abhängt.

Die den anziehenden Nukleonkräften entsprechende Bindungsenergie ist bei der kurzen Reichweite der Bindungskräfte proportional der Anzahl der Nukleonen im Kern, d.h. jedes Nukleon ist, soweit es sich im Inneren des Kerns befindet, mit der gleichen Energie an seine Nachbarn gebunden. Die daraus entstehende Gesamtbindungsenergie des Kernes ist also

(I, 5) $$E_1 = a_1 (N + Z),$$

worin a_1 eine Konstante ist.

Die Gl. (I, 5) kann jedoch nicht ganz richtig sein, denn sie berücksichtigt nicht, daß ein Teil der Nukleonen sich an der Oberfläche des Kerns befindet. Diese sind aber mit einer geringeren Energie gebunden als die im Kerninneren. (Man denke wieder an das Beispeil der Kletten. Die im Inneren liegenden Kletten sind mit fast allen ihren Häkchen an ihre Nachbarn gebunden, die an der Oberfläche liegenden aber nur mit einem Teil. Die nach außen gerichteten Häkchen haben keine Partner). Folglich wurde in der Gl. (I, 5) eine zu große Energie eingesetzt. Die zuviel eingesetzte Energie ist proportional den an der Oberfläche des Kerns liegenden Nukleonen, d.h. wenn wir den Kern als kugelförmig und groß gegenüber den Nukleonen ansehen, proportional zu $(N + Z)^{2/3}$ denn das Volumen des Kerns ist proportional $(N + Z)$ und die

Oberfläche demnach $(N+Z)^{2/3}$. Wir erhalten also als zweiten Energiebestandteil:

(I, 6) $$E_2 = -a_2 (N+Z)^{2/3}.$$

Als dritte Energie ist die durch die Abstoßungskräfte der Protonen bedingte aufzuzählen. Auch hier idealisieren wir wieder den Kern zu einer Kugel, in der die Gesamtladung der Protonen gleichmäßig verteilt ist. Die Feldenergie einer solchen Kugelladung ist proportional dem Quadrat der Gesamtladung, also proportional Z^2 und umgekehrt proportional dem Kugelradius, also $(N+Z)^{1/3}$. Damit wird der dritte Energiebeitrag:

(I, 7) $$E_3 = -a_3 \frac{Z^2}{(N+Z)^{1/3}}.$$

Nun folgen allerdings noch zwei Energieanteile, die auf so einfache Weise, wie die obigen, nicht zu verstehen sind. Sie sind aber auch für das Verständnis der Vorgänge in Atomreaktoren nicht so entscheidend. Der eine der beiden noch fehlenden Energieanteile entspricht der Forderung, daß innerhalb der Kerne eine Tendenz zur Paarbildung zwischen Neutronen und Protonen besteht. Das zeigt sich darin, daß — namentlich bei den leichten Kernen — diejenigen besonders stabil sind, in denen die Zahl der Protonen gleich der der Neutronen ist (vgl. die Faustregel auf S. 12). Formelmäßig drückt sich dieser Sachverhalt darin aus, daß der diesen Effekt beschreibende Energieanteil symmetrisch in N und Z sein muß. Er lautet:

(I, 8) $$E_4 = -a_4 \frac{(N-Z)^2}{N+Z}.$$

Schließlich erscheint noch ein Energiebeitrag, der der Tatsache Rechnung trägt, daß die Nukleonen einen Spin besitzen. Das ist anschaulich gesprochen ein Drall, eine rotierende Bewegung, die ein magnetisches Moment zur Folge hat. Je zwei Elementarteilchen der gleichen Art haben nun die Eigenart, ihre Spins gegenseitig abzusättigen, und das hat zur Folge, daß Nukleonen mit gerader Anzahl von Neutronen bzw. Protonen energetisch günstiger sind als solche mit ungeraden Anzahlen dieser Teilchen. Zum Beispiel gibt es unter 274 Atomkernen 162 mit gerader Anzahl von Neutronen und gerader Anzahl von Protonen, 53 mit gerader

Anzahl von Neutronen und ungerader Anzahl Protonen, 55 mit ungerader Anzahl Neutronen und gerader Anzahl Protonen und bei denen beide Zahlen ungerade sind 4, stabile Kerne. Der Energieanteil, der noch hinzuzufügen ist, ist:

$$E_5 = \pm a_5 (N+Z)^{-3/4} \tag{I, 9}$$

Darin ist $a_5 = 0$ für gerade Neutronen- und ungerade Protonenzahl oder umgekehrt. Das positive Vorzeichen gilt, wenn beide Zahlen gerade, das negative, wenn beide Zahlen ungerade sind. Addieren wir die Gl. (I, 5) bis (I, 9) und dividieren noch durch die Anzahl der Nukleonen im Kern, so erhalten wir für die mittlere Gesamtbindungsenergie je Nukleon:

$$\frac{E}{N+Z} = a_1 - a_2 \frac{1}{(N+Z)^{1/3}} - a_3 \frac{Z^2}{(Z+N)^{4/3}} - a_4 \frac{(N-Z)^2}{(N+Z)^2} \pm a_5 \frac{1}{(N+Z)^{7/4}}\,. \tag{I, 10}$$

E wird in der Gl. (I, 10) als Funktion von N und Z beschrieben und in der Abb. I, 1 als Funktionsfläche durch die hyperbelartigen Höhenschichtlinien dargestellt. Am größten wird die Gesamtbindungsenergie auf dem „Höhenrücken" in der Abb. I, 1 sein, weshalb man dort auch die in der Natur vorkommenden Atomkerne findet.

Wir sehen, daß bei den leichteren Kernen, die auf der S. 12 genannte Faustregel: die Anzahl der Protonen ist in den stabilen Kernen etwa gleich der der Neutronen, einigermaßen erfüllt ist. Das liegt eben an der Tendenz zur Paarbildung zwischen Neutronen und Protonen. Je schwerer die Kerne aber werden, desto mehr weicht das Besetzungsband von der in der Abb. I, 1 gestrichelt gezeichneten 45°-Linie nach oben ab. Das Uran-235 z. B. enthält in seinem Kern 92 Protonen und 143 Neutronen. Bei den schweren Kernen überwiegt also die Anzahl der Neutronen gegenüber der der Protonen. Das liegt daran, daß, je größer die Kerne werden, also je mehr Protonen sie enthalten, auch die Abstoßungskräfte zwischen den Protonen immer stärker werden. Der Kern baut nun, gewissermaßen um dem Schicksal, von den Protonenkräften gesprengt zu werden, zu entgehen, zwischen

den Protonen Neutronen als bindende Bestandteile ein. Der Neutronenüberschuß in den schweren Kernen hat also die Aufgabe, das Kerngefüge zusammenzuhalten.

Da in der Natur von allen möglichen Atomkernen nur diejenigen als genügend stabil übriggeblieben sind, die sich auf dem „Höhenrücken“ in der Abb. I, 1 aufhalten, also etwa der Faustregel $N \approx Z$ gehorchen, können wir zur Beschreibung der mittleren Bindungsenergien je Nukleon in den verschiedenen Kernen die Gl. (I,10) unter der Nebenbedingung $N \approx Z$ verwenden. Dann wird der vierte Summand, der die Paarbildung von Neutronen und Protonen kennzeichnet, klein gegenüber den ersten drei Summanden. Das fünfte Glied in der Gl. (I, 10) ist ohnehin klein. Das energetische Verhalten in der Natur vorkommender Kerne wird also im wesentlichen durch die ersten drei Summanden der Gl. (I, 10) beschrieben:

$$\text{(I, 11)} \qquad \frac{E}{Z+N} = a_1 - \frac{a_2}{(N+Z)^{1/3}} - \frac{a_3 Z^2}{(N+Z)^{4/3}} \text{ mit } N \approx Z\,.$$

In der Abb. I, 2 ist die mittlere Bindungsenergie je Nukleon $\frac{E}{Z+N}$ entsprechend der Gl. (I, 11) als Funktion der Nukleonenanzahl $N+Z$ für die in der Natur vorkommenden stabilen Kerne dargestellt. Der Kurvenverlauf ist nun leicht zu erklären: Wären alle Nukleonen, unabhängig von der Größe des Kernes und ihrer Lage im Kern mit der gleichen Energie gebunden, so müßte die Kurve horizontal in der Höhe a_1 liegen. [Erster Summand in der Gl. (I, 11)]. Diese Bindungsenergie wäre aber zu groß, weil ein Teil der Nukleonen ja an der Kernoberfläche liegt und dort weniger fest gebunden ist. Wir müssen also einen entsprechenden Energieanteil wieder abziehen, und zwar um so mehr, je größer das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen des Kerns wird, d.h. je kleiner die Kerne sind [zweiter Summand in der Gl. (I, 11)]. Darum neigt sich die Kurve in der Abb. I, 2 bei kleinen Kernen abwärts. Bei großen Kernen spielt dieser Oberflächeneffekt keine wesentliche Rolle mehr, dafür aber macht sich jetzt die abstoßende Wirkung der Protonen bemerkbar. Die Coulombschen Abstoßungskräfte haben ja im Gegensatz zu den anziehenden Nukleonenkräften eine große Reichweite. Die mittlere Abstoßungsenergie je Proton ist also nicht wie im Falle der nuklearen Anziehungskräfte ungefähr

konstant (Gl. I, 5), sondern wächst mit der Anzahl der Protonen (Gl. I, 7), und da nach der Faustregel die Anzahl der Protonen mit der der Nukleonen wächst, macht sich die Abstoßung der Protonen um so stärker bemerkbar, je schwerer der Kern wird. Wir müssen also einen weiteren Energiebetrag abziehen, der mit wachsender Nukleonenzahl zunimmt. Deshalb neigt sich die Kurve in der Abb. I, 2 auch bei schweren Kernen abwärts. Tatsächlich ordnen sich die stabilen Atomkerne einigermaßen gut in

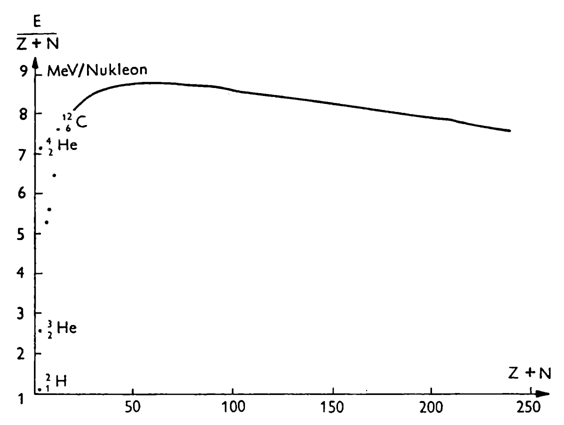


Abb. I, 2. Die Bindungsenergie je Nukleon in Abhängigkeit von der Nukleonenzahl $(N+Z)$ gemäß der Gl. I, 11. Als besonders stabile Kerne, die oberhalb der Kurve liegen, sind Helium-4 und Kohlenstoff-12 eingezeichnet

der Nähe der Kurve (Abb. I, 2) ein. Einige Kerne wie Helium, Kohlenstoff usw. sind jedoch fester gebunden, als die ihnen benachbarten Kerne. Bei ihnen ist die Anzahl der Neutronen gleich der der Protonen. Außerdem sind beide Anzahlen geradzahlig. Die Stabilität dieser Kerne ist auf ähnliche Weise zu verstehen wie die chemische Stabilität der Edelgase.

Damit ist der Verlauf der Energiekurve (Abb. I, 2) modellmäßig erklärt. Seine Bedeutung für die Praxis ist die folgende:

Die Atomkerne, deren Nukleonenzahl ungefähr bei $N+Z = 60$ liegt, sind im Mittel stabiler als die leichteren und auch als die schwereren Kerne, d. h. die Bindungsenergie der mittelschweren Kerne ist größer als die der leichten und die der schweren Kerne. Das bedeutet, daß man — wie das im einzelnen vor sich geht,

soll etwas später beschrieben werden — sowohl durch die Zerlegung schwerer Kerne in mittelschwere als auch durch die Synthese leichter Kerne zu mittelschweren nutzbare Energie gewinnen kann.
Dabei verwandelt sich potentielle Energie in kinetische. Die erstere Art der Energiegewinnung betrifft die Spaltungsreaktoren, die letztere die Wasserstoff-Atombombe und die vorläufig noch hypothetischen Fusionsreaktoren. Im ersten Falle werden schwere Atomkerne, z.B. Uran-235, durch Neutronenbeschuß gespalten und verwandeln sich dadurch in mittelschwere Kerne, z.B. in Xenon und andere, im zweiten Falle werden leichte Kerne, z.B. Deuterium und Tritium zur Fusion gebracht, so daß z.B. Helium entsteht. Man schreibt solche Reaktionsgleichungen ähnlich wie in der Chemie:

$$ {}_1^2D + {}_1^3T = {}_2^4\mathrm{He} + n. $$

Das n bezeichnet ein bei dieser Reaktion übrigbleibendes Neutron. Wir werden uns im folgenden nur mit der Energieerzeugung durch Spaltung *schwerer* Kerne befassen.

2. Reaktionen zwischen Kernen und Neutronen

Im Abschnitt 1 d) wurde über die Art der Bindung der Nukleonen im Kern und die daraus herzuleitende Systematik des Kernaufbaues gesprochen. Im folgenden wollen wir diese Kenntnisse noch erweitern, indem wir das Verhalten der Atomkerne bei Reaktionen mit Neutronen betrachten.
Daß wir hier von Reaktionen mit Neutronen reden und nicht von solchen mit α-Teilchen (das sind Helium-Kerne) oder mit Protonen, hat einen praktischen Grund: Um eine Reaktion zwischen etwa einem Proton und einem Atomkern herbeizuführen, muß man das Proton in die unmittelbare Nähe des Kerns bringen. Dazu ist aber, da Kern und Proton gleichnamig positiv geladen sind und sich infolgedessen abstoßen, eine sehr große Energie, d.h. eine sehr große Geschwindigkeit notwendig, die man dem Proton erteilen müßte. Solche Energien kann man zwar im Laboratorium durch Teilchenbeschleuniger künstlich herstellen, in Spaltungsreaktoren aber kommen sie kaum vor. Neutronen als ungeladene Teilchen hingegen erfahren eine solche Abstoßung

durch die Kerne nicht. Sie können sich ihnen ungehindert nähern und mit ihnen reagieren.

Wir unterscheiden im wesentlichen drei Arten von Neutronenreaktionen:

a) Spaltung eines schweren Kerns
b) Neutroneneinfang durch einen Kern
c) Streuung an einem Kern.

a) Die Kernspaltung

Die Spaltung eines Atomkerns durch den Beschuß mit einem Neutron ist die wichtigste Reaktion, die sich in einem Reaktor abspielt; denn sie liefert die Atomenergie.

Zunächst einmal stellen wir fest, daß sich in nennenswertem Maße nur die allerschwersten Kerne, die wir kennen, durch Neutronen spalten lassen. Das hat einen einfachen Grund: Wir sahen im vorigen Abschnitt, daß bei den schweren Kernen die mittlere Bindungsenergie je Nukleon geringer ist als bei den mittelschweren (Abb. I, 2). Anschaulich bedeutet das, daß die schweren Kerne durch die abstoßende Wirkung der Protonen ein wenig aufgelockerter sind als die mittelschweren. Zwar halten sie dank der eingebauten bindenden Neutronen noch zusammen, aber ihr Nukleonengefüge ist doch nicht so fest, wie bei den mittleren Kernen und deshalb sind sie leichter zu sprengen.

Zum anderen finden wir, daß unter den schweren Kernen praktisch nur diejenigen mit ungerader Massenzahl spaltbar sind. So ist das Uran-235 leicht spaltbar, das Isotop Uran-238 aber nicht, Das liegt daran, daß die Kerne mit gerader Massenzahl stabiler sind als die mit ungerader.

Ferner bewirken in überwiegendem Maße *langsame* Neutronen Kernspaltungen. Auch diesen Effekt können wir modellmäßig erklären: ein Neutron muß, um einen Kern zu spalten, nicht unmittelbar mit dem Kern zusammenstoßen. Es genügt, wenn es in einigem Abstand am Kern vorüberfliegt. Besteht bei dem Kern eine Tendenz zur Spaltung, so versetzt das vorüberfliegende Neutron den Kern zunächst in Schwingungen, die ihn, wenn sie heftig genug werden, zum Zerreißen bringen. (Das Neutron wird dabei vom Kern eingefangen.) Um aber eine Schwingung aufzuschaukeln, muß die Anregung eine gewisse

Zeit wirken. Je länger sich also das Neutron in der Nähe des Kernes aufhält, d.h. je kleiner seine Geschwindigkeit ist, desto heftiger werden die Kernschwingungen, desto leichter kommt es zur Spaltung. Man braucht also langsame Neutronen im Reaktor, um Spaltungsreaktionen zu erhalten. Langsame Neutronen sind dabei solche, die eine mittlere Energie von einigen hundertstel eV[1] haben. Diese Energie entspricht nach dem Gleichverteilungssatz etwa den Temperaturen, die in den Reaktoren herrschen. Man nennt deshalb diesen Energiebereich, in dem sich auch die Uranspaltung ereignet, den „thermischen Bereich" und die Neutronen, die sich im thermischen Bereich aufhalten, „thermische Neutronen".

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein an einem Kern vorbeifliegendes Neutron zur Spaltung führt, ist seiner Geschwindigkeit umgekehrt proportional ($1/v$-Gesetz), ein Gesetz, das allerdings nur mit Hilfe der Quantenmechanik zu verstehen ist.

Der Mechanismus der Energieumwandlung im Atomkern durch dessen Spaltung ist mit klassischen Vorstellungen nicht ohne weiteres zu erklären. Sie läßt sich nur in der Formelsprache des Mathematikers beschreiben. Eine solche Beschreibung hat Einstein gegeben, indem er im Zusammenhang mit seiner Relativitätstheorie schloß, daß eine Identität besteht zwischen materieller Masse und Energie.

Wir wollen diesen eigentümlichen Sachverhalt an Hand der Spaltungsreaktion beschreiben, die in einem Uran-Reaktor abläuft:

Wir spalten einen Uran-235-Kern, indem wir ihn mit einem Neutron zur Reaktion bringen. Die Masse des Uran-235-Kerns plus der Masse des Neutrons ist in Masseneinheiten:

$$M_{U_{235}} + M_n = 235{,}124 + 1{,}00897 = 236{,}133 \text{ ME}.$$

Der Uran-235-Kern möge in zwei Teile der Massenzahlen 95 und 139 zerfallen. Die genauen Massenwerte dieser beiden Spaltprodukte sind

$$M_{139} = 138{,}955 \text{ ME}; \quad M_{95} = 94{,}945 \text{ ME}.$$

[1] Zur Energieeinheit eV siehe S. 24.

Zwei Neutronen werden bei der Spaltung frei. Deren Massenwert ist:

$$2\,M_n = 2 \cdot 1{,}00897 = 2{,}01794 \text{ ME.}$$

Zieht man die Massenbilanz dieses Spaltungsvorganges, so stellt man fest, daß die Summe der Massenwerte der Spaltprodukte und der zwei frei gewordenen Neutronen um 0,215 ME kleiner ist als die Summe der Massenwerte von Uran-235-Kernen und dem Neutron, das die Spaltung verursacht hat. Es ist also bei dem Spaltungsprozeß Masse, d.h. Materie, verlorengegangen. Das ist eine Erscheinung, die der klassischen Physik unbekannt war; denn den Satz von der Erhaltung der Masse hatte man stets ebenso wie den von der Erhaltung der Energie bestätigt gefunden, und in der Tat bleibt er auch hier gültig, wenn man die von Einstein geforderte Identität von Masse und Energie annimmt. Die Massenbilanz bei dem oben beschriebenen Spaltungsvorgang lautet dann: Es ist bei der Spaltung des Urankerns eine Masse von $\Delta M = 0{,}215$ ME verlorengegangen. Diese Masse ΔM hat sich in eine entsprechende Energie ΔE umgewandelt. Die Energie ΔE ist die Spaltungsenergie, die wir bei der Spaltung eines Uran-235-Kernes als Wärmeenergie gewinnen. Die einfache Verknüpfungsformel für die beiden völlig verschiedenartigen physikalischen Größen Masse und Energie lautet:

(I, 12) $$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

Die Größe c^2, das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, ist hier nur ein Proportionalitätsfaktor.

Es ist klar, daß zu diesen, den klassischen Vorstellungen ganz fremden Vorgängen bei der Energieumwandlung nicht ohne weiteres ein anschauliches Modell zu geben ist.

Es sei in diesem Zusammenhange noch kurz auf die in der Kernphysik gebräuchlichen Energieeinheiten eingegangen.

In der Physik der Elektronenhüllen hat sich, weil man als Werkzeug zur Untersuchung der Elektronenhüllen meistens elektrisch beschleunigte Elektronen verwendete, das Elektronenvolt (eV) als zweckmäßige Energieeinheit erwiesen. Ein Elektronenvolt ist die Bewegungsenergie, die ein Elektron dadurch gewinnt, daß es durch die Spannung von einem Volt beschleunigt wird. Die Energieäquivalente sind:

$1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{erg} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,W\mathrm{sec} = 0{,}383 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{cal}$[1]. Die Energien, die bei Umwandlungen der Elektronenhüllen, also etwa bei chemischen Vorgängen ausgetauscht werden, sind immer, wie schon eingangs erwähnt, in der Größenordnung einiger Elektronenvolt. Die Umwandlungsenergien in der Kernphysik sind hingegen wesentlich größer. Das geht z.B. schon aus der Abb. I, 2 hervor, in der die mittlere Bindungsenergie je Nukleon aufgetragen ist. Sie ist bei schweren Kernen etwa 8 MeV. Ein MeV, ein Megaelektronenvolt, ist das 10^6fache eines eV. Es ist also

$$\text{(I, 13)} \quad 1\,\mathrm{MeV} = 1{,}602 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{erg} = 1{,}602 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{Wsec} = 0{,}383 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cal} = 1{,}074.10^{-3}\,\mathrm{ME}.$$

Das letzte der Äquivalente entspricht der Einsteinschen Beziehung Gl. (I, 12.)

Daß die in der Kerntechnik verwendeten Brennstoffe so viel ergiebiger sind als die konventionellen, wie Kohle, Öl usw., bei denen die Energieumsetzung durch chemische, also die Elektronenhülle betreffende Vorgänge erfolgt, liegt eben daran, daß der Energieumsatz bei einer Kernreaktion ungleich größer ist als bei einer chemischen Reaktion.

Wir wollen nun noch mit Hilfe der Gl. (I, 13) die Energie berechnen, die wir durch die Spaltung eines Uran-235-Kernes erhalten. Wir hatten einen Massenverlust von $\Delta M = 0{,}215$ ME ausgerechnet. Nach der Gl. I, 13 entspricht dem eine Energie von $\Delta E = 198\,\mathrm{MeV} = 3{,}18.10^{-11}\,\mathrm{Wsec}$. Diese Energie gewinnen wir also in Form von Wärme dadurch, daß die Spaltprodukte, die mit großer Geschwindigkeit fortfliegen, mit anderen Atomen zusammenstoßen und diese dann in thermische Bewegung versetzen.

Außer der Energie gewinnt man bei der Spaltung schwerer Kerne noch etwas für den Betrieb eines Atomreaktors unbedingt Lebenswichtiges, nämlich neue Neutronen. Neutronen werden ja benötigt, um wieder weitere Atome zu spalten; denn das Neutron, das zu einer Spaltung führt, wird bei diesem Prozeß verbraucht. Würde nicht auf irgendeine Weise für die Produktion neuer Neutronen gesorgt, so müßte der Reaktor verlöschen.

---

[1] Da die Energie eines Freiheitsgrades der Bewegung von Atomen bzw. Neutronen $^1/_2\,kT$ ist (T: Temperatur), entspricht der Energie von 1eV eine Temperatur von $2{,}32\;10^4$ Grad Kelvin.

Der Erzeugungsmechanismus für neue Neutronen ist der Spaltungsvorgang selber. Wir sahen aus der Abb. I, 1, daß in den schweren Kernen die Zahl der Neutronen die der Protonen überwiegt. Diese mehr eingebauten Neutronen dienten dazu, die Abstoßungskräfte der Protonen zu kompensieren. Durch die Spaltung werden die schweren Kerne in leichtere verwandelt. Diese leichteren Spaltprodukte kommen wegen der verminderten Abstoßungswirkung der Protonen mit weniger Bindeneutronen aus, wie es ja auch aus der Abb. I, 1 hervorgeht. Es sind also nach der Spaltung Neutronen übrig. Diese übrigen Neutronen — es sind im allgemeinen 2 bis 3 je Spaltung, je nachdem in welche Spaltprodukte das Uran zerfallen ist — erscheinen zum größten Teil unmittelbar nach der Spaltung, zum kleinen Teil aber auch erst einige Sekunden oder auch Stunden später. Die letzteren sind die sogenannten verzögerten Neutronen. Sie haben, wie wir noch sehen werden, eine Bedeutung für die Regelung der Reaktoren.

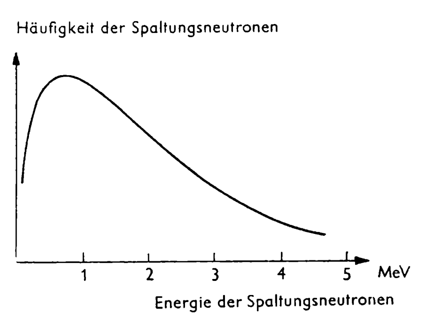


Abb. I, 3. Die Häufigkeitsverteilung der Spaltungsneutronen

Die bei der Spaltung entstehenden Neutronen, die wir Spaltungsneutronen nennen wollen, fliegen, ebenso wie die Spaltprodukte, mit großer Geschwindigkeit explosionsartig davon. Im Mittel entspricht ihre Geschwindigkeit einer Energie von 1 bis 2 MeV, einige Neutronen erreichen sogar Energien über 10 MeV. In der Abb. I, 3 ist die Häufigkeit der Spaltungsneutronen in Abhängigkeit von ihrer Bewegungsenergie dargestellt.

Im folgenden sei noch einiges über die Spaltprodukte gesagt. Sie bedingen die unangenehmste Begleiterscheinung der Atomenergieerzeugung in Spaltungsreaktoren, die radioaktiven Strahlen, auf die wir an dieser Stelle kurz eingehen wollen.

Bei der Spaltung zerfällt der schwere Kern in Bruchstücke, die zwar momentan existenzfähig sind, im allgemeinen aber sich doch nicht im energetisch günstigsten Zustand befinden. Solche

Spaltprodukte verwandeln sich im Laufe der Zeit in energetisch günstigere, in stabilere Kerne. Eine derartige Umwandlung ist ein rein zufälliges, d. h. nicht von außen induziertes Ereignis. Die Zufälligkeit ist so zu verstehen, daß die Nukleonen in einem quasistabilen Kern in thermischer Bewegung sind und dadurch ihre Konfiguration dauernd ändern. Irgendwann einmal ist eine solche Konfiguration günstig für eine Umwandlung, etwa dadurch, daß eine Verbindung von zwei Protonen und zwei Neutronen zur Bildung eines Heliumkerns führt. Das ist eine Art Fusionsprozeß, bei dem, wie wir wissen, Energie frei wird, und mit Hilfe dieser Energie kann sich der Heliumkern aus dem Mutterkern losreißen. Einen derartigen Zerfallsprozeß nennt man eine α-Strahlung und die ausgestrahlten Heliumkerne α-Teilchen.

α-Teilchen fliegen, ähnlich wie die Spaltprodukte, bei der Uranspaltung mit großer Geschwindigkeit fort. Ihre kinetische Energie liegt zwischen 4 und 10 MeV.

Außer der α-Strahlung gibt es noch zwei weitere Arten von Korpuskularstrahlen, die β_-- und die β_+-Strahlung. Die β-Teilchen sind Elektronen, die β_+-Teilchen Positronen. Die letzteren sind allerdings sehr kurzlebig und spielen deshalb in diesem Zusammenhang nur eine geringe Rolle. β_+-Strahlen sendet ein Kern aus, wenn sich eines seiner Protonen in ein Neutron verwandelt und β_--Strahlen bei der Verwandlung eines Neutrons in ein Proton, wie wir es im Abschnitt 1b bereits beschrieben hatten. Die von β-Teilchen erreichten Energien sind recht verschieden, etwa zwischen 0,01 und 12 MeV. Der oberen Grenze entspricht eine Geschwindigkeit, die dicht unter der größten überhaupt möglichen, der Lichtgeschwindigkeit, liegt.

Neben den eben besprochenen sogenannten Kern-β-Strahlen gibt es noch die sekundären β-Strahlen. Das sind Elektronen, die durch Wechselwirkung mit den gleich noch zu besprechenden γ-Strahlen aus der äußeren Elektronenhülle der Atome emittiert werden.

Die γ-Strahlung ist die vierte Art der radioaktiven Strahlen. Sie ist nicht, wie die α- und die β-Strahlung eine Korpuskularstrahlung, sondern eine elektromagnetische Welle.

Die von dem Atomkern ausgestrahlten γ-Strahlen entstehen auf eine ähnliche Weise, wie die von der Elektronenhülle ausgesandten Lichtstrahlen, nämlich durch Änderungen des Energiezustandes.

Ein Atomkern vermag, ebenso wie die Elektronenhülle, verschiedene diskrete Energiezustände einzunehmen. Beim Übergang aus einem Zustand höherer in einen geringerer Energie wird eine elektromagnetische Wellengruppe abgestrahlt. Die Wellenfrequenz ist wieder durch die Gl. (I, 1) gegeben:

$$E_1 - E_2 = h\nu.$$

Hier sind jedoch wegen der viel größeren Energieumsätze im Kern auch die Wellenfrequenzen viel größer als bei den entsprechenden Vorgängen in der Elektronenhülle. Die in γ-Strahlen enthaltenen Energien erreichen bis zu 2,5 MeV. Ihr Frequenzumfang ist aus der Abb. I, 4, in der für die verschiedenen Arten elektromagnetischer Wellen die einzelnen Wellenlängenbereiche in einem logarithmischen Maßstab eingezeichnet sind, zu entnehmen.

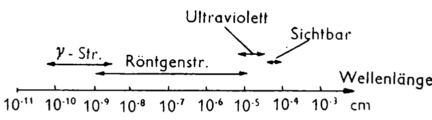


Abb. I, 4. Spektralbereiche elektromagnetischer Wellen

Normalerweise befinden sich die Atomkerne in ihrem Grundzustand, das ist der Zustand kleinster Energie. Durch den Spaltungsvorgang oder durch einen radioaktiven Zerfall oder auch den Einfang eines Neutrons, von dem im nächsten Abschnitt noch die Rede sein wird, geraten sie in angeregte Zustände, aus denen sie dann früher oder später, auch nach statistischen Gesetzen, in den Grundzustand unter Aussendung einer γ-Strahlung zurückkehren, wenn nicht zuvor eine andere Umwandlung sich vollzieht. So kommt es, daß die γ-Strahlung eine Begleiterscheinung fast aller Kernreaktionen ist.

Außer durch Kernzustandsänderungen können γ-Strahlen z.B. noch durch die Verschmelzung eines Positrons und eines Elektrons entstehen. Man nennt diesen Vorgang „Zerstrahlung"; das Positron und das Elektron verschwinden nämlich dabei vollständig und ihre Masse geht nach der Gl. (I, 12) in die Strahlungsenergie der γ-Strahlung über. Der umgekehrte Vorgang ist auch möglich: die Energie einer γ-Strahlung geht in Masse über, es entsteht ein Positron und ein Elektron. Man nennt das eine „Paarerzeugung".

Das Gesetz, nach dem eine radioaktive Substanz zerfällt, folgt einfach aus der Forderung der Zufälligkeit des Zerfalls der einzelnen Kerne. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter N vorhandenen radioaktiven Atomkernen eine Anzahl dN in einer Zeitspanne dt zerfällt, ist unabhängig von der Zeit selber:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt \qquad \text{(I, 14)}$$

λ ist eine von der Art des zerfallenden Stoffes abhängige Konstante, die etwas über die Schnelligkeit aussagt, mit der der Stoff zerfällt. Sie heißt die Zerfallskonstante. Integriert lautet die Gl. (I, 14)

$$N = N_0\, e^{-\lambda t} \qquad \text{(I, 15)}$$

N_0 ist die Ausgangsmenge zur Zeit $t = 0$. Die Zeit, die die Substanz braucht, um auf die Hälfte ihrer Ausgangsmenge zu zerfallen, ist

$$t_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{0{,}694}{\lambda}\,. \qquad \text{(I, 16)}$$

$t_{1/2}$ ist die sogenannte Halbwertszeit.
Meistens zerfallen die Spaltprodukte nicht nur einmal, sondern mehrmals nacheinander. Dann muß man mehrere Gleichungen von der Art der Gl. (I, 14) miteinander koppeln. Wir werden solche Fälle noch kennenlernen.

b) Der Neutroneneinfang

Unter dem Neutroneneinfang versteht man eine Reaktion, bei der ein Kern ein Neutron absorbiert, ohne dadurch gespalten zu werden. Der Neutroneneinfang ist aus zwei Gründen im Zusammenhang mit der Reaktortechnik interessant. Der erste Grund ist ein unerfreulicher. Durch den Einfang gehen Neutronen verloren, ohne daß neue entstehen oder Energie erzeugt wird. Mit den Neutronen im Reaktor aber muß man sparsam umgehen; denn von der Kunst, mit ihnen hauszuhalten, hängt letzten Endes, wie wir noch sehen werden, die Größe des Reaktors ab. Je mehr Neutronen man spart, desto kleiner kann der Reaktor gebaut werden.
Der zweite Grund für unser Interesse am Neutroneneinfang liegt darin, daß bei einigen schweren Atomen, die an sich nicht spaltbar sind, weil sie wegen ihrer geraden Massenzahl zu stabil sind, z. B.

Uran-238 und Thorium-232, durch den Einfangprozeß eine Umwandlungsreihe eingeleitet wird, an deren Ende ein schwerer Kern mit ungerader Massenzahl steht, der spaltbar ist. Wir haben auf diese Weise die Möglichkeit, einige Neutronen, falls wir solche im Reaktor übrig haben, zur Neuherstellung von Brennstoffen zu verwenden und dadurch unseren Brennstoffvorrat zu strecken. Wir kommen darauf gleich im einzelnen noch zurück. Wir unterscheiden im wesentlichen zwei Fälle des Neutroneneinfanges, die thermische Absorption und die Resonanzabsorption. Die thermische Absorption ist der Einfang thermischer Neutronen, während die Resonanzabsorption in einem höheren Energiebereich stattfindet. Beide Einfangprozesse sind von einer γ-Strahlung begleitet.

Kennzeichnend für den Resonanzeinfang eines Neutrons durch einen Kern ist die Tatsache, daß die Einfangbereitschaft des Kerns außerordentlich stark von der Neutronengeschwindigkeit abhängt, so daß es nur bei ganz bestimmten diskreten Neutronengeschwindigkeiten zu einem Einfang kommt. Ist die Neutronenenergie etwas größer oder kleiner, als diese sogenannte Resonanzenergie, so besteht von Seiten des Kernes keine Bereitschaft zur Absorption.

Dieser eigentümliche Sachverhalt ist auf folgende Weise zu verstehen. Es wurde bei der Besprechung der γ-Strahlen schon gesagt, daß ein Atomkern verschiedene diskrete Energiezustände einnehmen kann. Fängt nun ein Kern ein Neutron ein, so wird ihm ja, da das Neutron sich mit einer bestimmten Bindungsenergie an ihn kettet, Energie zugeführt. Außer der Bindungsenergie liefert das Neutron noch die seiner Geschwindigkeit entsprechende Bewegungsenergie an den Kern ab. Diese beiden Energien speichert der Kern, indem er in einen angeregten Zustand, also einen solchen höherer potentieller Energie, übergeht. Das kann aber nur dann geschehen, wenn die im ganzen vom Kern aufgenommene Energie gerade gleich ist dem Energieunterschied zwischen dem Niveau, das der Kern vor dem Einfang einnahm und einem der möglichen höheren Anregungsniveaus nach dem Einfang. Da die Niveaudifferenzen feste, diskrete, dem Kern eigene Werte sind, und auch die Neutronenbindungsenergie ein solcher fester Wert ist, ist der eben beschriebene Resonanzeinfang nur bei bestimmten, diskreten Neutronenenergien möglich.

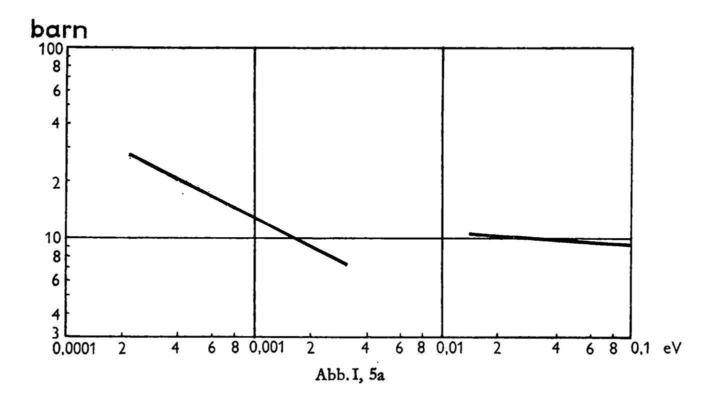


Abb. I, 5a

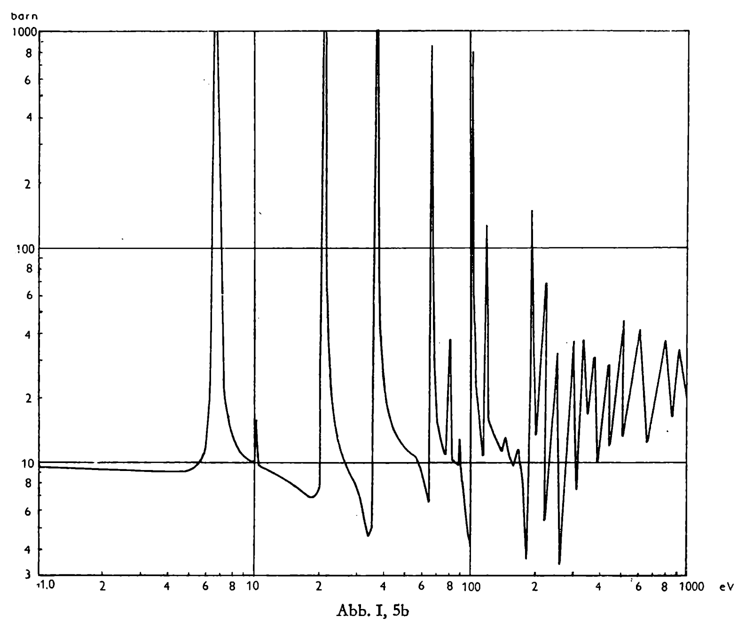


Abb. I, 5b

Abb. I, 5a u. b Der Wirkungsquerschnitt des Uran-238 in verschiedenen Energiebereichen

Der Resonanzeinfang durch Uran-238-Kerne sei noch einmal an Hand der Abb. I, 5a u. 5b veranschaulicht. Darin ist der sogenannte Wirkungsquerschnitt, das ist ein Maß für die Tendenz des Uran-238-Kerns ein Neutron zu absorbieren, aufgetragen in

Abhängigkeit von der kinetischen Energie des Neutrons, beides in logarithmischen Koordinaten. Man sieht, wie ungeheuer scharf die „Resonanzspitzen“ sind.

Die Lage der Resonanzspitzen ist für die verschiedenen Atomkerne unterschiedlich und jeweils bedingt durch die Lage der Energieniveaus in den Kernen. Ebenso sind auch die Energiebereiche, in denen bei den verschiedenen Kernen Resonanzabsorption auftritt, unterschiedlich. Jedoch liegen die Resonanzspitzen bei den meisten Kernen zwischen 1 eV und 1000 eV. Man nennt daher diesen Energiebereich das „Resonanzgebiet“ (siehe Abb. I, 6).

Der Bereich, in dem Uranspaltungen zu erwarten sind, liegt unterhalb des Resonanzbereiches, die Energien der Spaltungsneutronen aber nach der Abb. I, 6 wesentlich darüber. Da die Spaltungsneutronen abgebremst werden, um zu Spaltungen führen zu können, müssen sie den Resonanzbereich durchlaufen und sind dabei in Gefahr, eingefangen zu werden. Wegen der Schärfe der Spitzen entgeht jedoch der größte Teil der Neutronen diesem Schicksal. Die Wahrscheinlichkeit dafür nennt man die „Resonanzentkommwahrscheinlichkeit“[1]. Sie wird uns im weiteren noch öfter begegnen.

Abb. I, 6. Die wesentlichen Neutronenenergiebereiche

Für den Einfang thermischer Neutronen sind keine Resonanzenergieniveaus notwendig. Die Einfangbereitschaft im thermischen Bereich ist ebenso zu erklären wie die Spaltbarkeit von Kernen durch langsame Neutronen, wie wir sie im Abschnitt 2a besprochen haben.

Die im Resonanzgebiet oder im thermischen Bereich von den Atomkernen eingefangenen Neutronen wandeln die Kerne zunächst in Isotope ihrer Art um und leiten damit häufig eine Umwandlungsreihe ein. Wir wollen zwei solcher Reihen, die für die Reaktortechnik von Bedeutung sind, allerdings in etwas vereinfachter Form, kennenlernen; die Uran-238-Reihe und die Thorium-232-Reihe.

---

[1] Neuerdings wird die Bezeichnung „Bremsnutzung“ vorgeschlagen.

An den Anfang der Uran-238-Reihe stellen wir das in der Natur vorkommende Uranisotop Uran-238.
Uran-238 wird in der Natur stets zusammen mit dem spaltbaren Uran-235 in einem ganz bestimmten Mischungsverhältnis 1 : 140 gefunden. (Auf ein U_{235}-Atom kommen 140 U_{238}-Atome). Man nennt Uran in diesem Mischungsverhältnis „Natürliches Uran“, im Gegensatz zum „Angereicherten Uran“, in dem die Anzahl der U_{238}-Kerne künstlich vermindert wurde.
Uran-238 ist nur sehr schlecht spaltbar, hat aber die Fähigkeit sowohl schnelle Neutronen durch Resonanzabsorption als auch

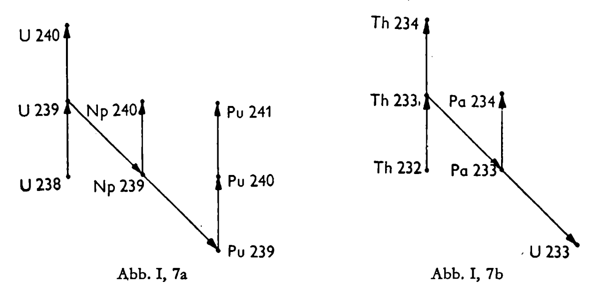


Abb. I, 7. Die Uranreihe (*a*) und die Thoriumreihe (*b*). Die geometrische Anordnung der Elemente entspricht der in der Abb.I, 1, so daß ein Neutroneneinfang einem Platzwechsel des Elementes nach oben, einem β-Übergang ein solcher nach rechtsunten entspricht

thermische Neutronen einzufangen. Es entsteht dadurch ein neues Uranisotop, das Uran-239. Uran-239 kann sich auf zweierlei Weise umwandeln: Einmal kann es ein weiteres Neutron einfangen, so daß Uran-240 entsteht, zum anderen kann es durch β-Zerfall in Neptunium-239 übergehen. Hier haben wir den im Anfang geschilderten Fall der Umwandlung eines Neutrons im Atomkern in ein Proton vor uns. Neptunium kann wieder ein Neutron einfangen und damit Neptunium-240 bilden, oder durch einen weiteren β-Zerfall in Plutonium-239 übergehen. Plutonium-239 bildet dann zum Teil wieder durch zweimaligen Neutroneneinfang Plutonium-241. In der Abb. I, 7a ist die Uran-238-Reihe noch einmal schematisch dargestellt. Sie ist, wie schon gesagt, nicht ganz vollständig, enthält aber das für uns Wesentliche.
Das wichtigste unter den Folgeprodukten des Uran-238 ist das Plutonium-239, weil es als schweres Element ungerader Massenzahl

spaltbar ist. In thermischen Reaktoren, das sind Reaktoren, bei denen die Spaltung bei thermischen Energien stattfindet, ist Plutonium jedoch aus mehreren Gründen ein meist unerwünschter Spaltstoff.

Die zweite für uns interessantere Umwandlungsreihe ist die vom Thorium-232 ausgehende.

Die Thorium-Reihe sieht ähnlich aus wie die Uran-Reihe.

Thorium-232 verwandelt sich durch Neutroneneinfang in Thorium-233 und das wieder zum geringen Teil in Thorium-234. Zum größeren Teil zerfällt das Th_{233} unter β-Strahlung in Protaktinium-233. Protaktinium-233 bildet zum Teil Protaktinium-234 und zum größeren Teil unter nochmaligem β-Zerfall Uran-233. Uran-233 ist als Kernbrennstoff geeigneter als Plutonium. Die Abb. I, 7b zeigt die Thoriumreihe.

Man kann also Neutronen dazu verwenden, neuen Brennstoff herzustellen. Das würde etwa so vor sich gehen, daß man den Reaktor zunächst mit Uran-235 als Brennstoff betreibt, diesem aber einen Teil Thorium beifügt. Das Thorium verwandelt sich dann in Uran-233, das natürlich, da es ja spaltbar ist, zum Teil wieder mit verbrennt, zum anderen Teil aber nach einiger Zeit dem Reaktor entnommen werden kann und schließlich, wenn man auf diese Weise genug gesammelt hat, selbst als Brennstoff-Füllung des Reaktors dienen kann. Man nennt diesen Vorgang der Neuherstellung von Brennstoff im Reaktor das „Brüten".

c) Die Streuung

Die Streuung ist die anschaulich einfachste Neutronenreaktion: Das Neutron prallt mit einem Kern zusammen und wird von ihm nach den Gesetzen des elastischen oder auch des inelastischen Stoßes, wie es aus der Mechanik bekannt ist, reflektiert, oder, wie man sagt „gestreut". Wichtig für die Reaktortechnik ist dabei, daß bei dem Streuprozeß Energie vom Neutron auf den Kern übertragen wird, und zwar um so mehr, je leichter der Kern ist.

Wir wissen ja bereits, daß wir für die Spaltung des Urans langsame, thermische Neutronen brauchen, daß aber die Neutronen, die bei der Spaltung entstehen, die Spaltungsneutronen, sehr große Energien mit sich führen. Es muß also auf irgendeine Weise dafür gesorgt werden, daß den Spaltungsneutronen ihre

Energie entzogen wird. Das geschieht dadurch, daß dem Brennstoff im Reaktor ein Material beigemischt wird, das aus leichten Atomen, einem sogenannten Moderator, besteht. Die Neutronen, die ja als elektrisch neutrale Teilchen sich in der Materie weitgehend ungehindert bewegen können, verlassen den Brennstoff, geraten in den Moderatorbereich und werden dort durch mehrfaches Zusammenstoßen mit Moderatorkernen abgebremst, bis sie die mittlere Energie der Moderatorkerne, d.h. die thermische Energie, erreichen. Die thermischen Neutronen können dann im Brennstoff Spaltungen bewirken.
Man sieht schon, daß ein Moderator aus möglichst leichten Atomen bestehen soll; d.h. die Abbremsung soll mit möglichst wenigen Zusammenstößen vollzogen sein; denn erstens enthält jeder Moderator einen geringen Prozentsatz neutronenabsorbierender Atome, so daß die Wahrscheinlichkeit einer Absorption im Moderator mit der Anzahl der Stöße wächst, zweitens fließen immer einige Neutronen während des Abbremsprozesses durch die Wände des Reaktors aus, und zwar um so mehr, je größer die Zahl der zur Abbremsung notwendigen Stöße ist.
Moderatoren, die in der Reaktortechnik verwendet werden, sind z.B. Wasser, schweres Wasser, Graphit usw.
Wasser müßte, da es den sehr leichten Wasserstoff enthält, ein guter Moderator sein. Leider aber hat Wasser die Eigenschaft Neutronen nicht nur zu streuen, sondern auch zu absorbieren. Viel günstiger ist schweres Wasser. Es bremst zwar nicht ganz so gut wie Wasser, aber es absorbiert dafür fast keine Neutronen. Graphit besteht aus Kohlenstoff mit der Massenzahl 12, bremst also viel schlechter als Wasser und schweres Wasser, hat aber dafür Vorzüge technologischer Art.
Es wurde bereits angedeutet, daß es zwei Arten der Neutronenstreuung gibt, die elastische und die inelastische Streuung.
Die inelastische Streuung kann man sich so vorstellen, daß das Neutron in den Kern eindringt, ihn in einen höheren Energiezustand versetzt und veranlaßt, das gleiche Neutron, oder auch ein anderes, wieder zu emittieren. Das emittierte Neutron führt in diesem Falle der inelastischen Streuung eine geringere Energie mit sich, als das Neutron hatte, das die Emission auslöste. Die Energiedifferenz speichert der Kern zunächst als Anregungsenergie

und gibt sie dann als γ-Strahlung wieder ab. Da es bei dieser Art der Streuung der Anregung des Kerns in einen höheren Energiezustand bedarf, die Energieniveaus der Kerne in der Nähe des Grundzustandes aber einen Abstand in der Größenordnung 0,1 MeV haben, kommt die inelastische Streuung praktisch nur bei Neutronenenergien oberhalb 0,1 MeV vor. Die weitaus meisten Streuungen der Neutronen finden im Reaktor aber bei Energien unterhalb dieses Wertes statt. Die inelastische Streuung spielt deshalb in der Reaktortechnik eine geringe Rolle und wir werden uns im weiteren auch nur mehr um die elastische Streuung kümmern.

Bei der elastischen Streuung sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Die eine Art ist ein Resonanzeffekt, ähnlich wie beim Resonanzeinfang. Das Neutron dringt in den Kern ein, wenn seine Geschwindigkeit z.B. gerade der Niveaudifferenz zwischen dem Grundzustand des streuenden Kerns vor dem Stoß und einem angeregten Zustand nach der Aufnahme des Neutrons entspricht. Der angeregte Kern emittiert dann das Neutron (oder ein anderes) wieder, wobei er ihm aber die aufgenommene Anregungsenergie wieder mitgibt, so daß die gesamte mechanische Energie erhalten bleibt, wie es bei einem elastischen Stoß sein muß.

Im zweiten Fall der elastischen Streuung dringt das Neutron gar nicht in den Kern ein, sondern wird gewissermaßen an der Oberfläche reflektiert.

Von beiden Arten der elastischen Streuung spielt die zweite die weitaus größere Rolle.

Experimente zeigen in der Tat, wie wir noch sehen werden, daß man die Neutronenstreuung an Atomkernen wie den elastischen Stoß zweier Kugeln behandeln kann.

3. Der Atomreaktor

Nachdem bisher die atomaren Vorgänge in einem Atomreaktor behandelt wurden, soll in diesem Abschnitt kurz die Wirkungsweise eines Spaltungsreaktors im ganzen erklärt werden.

a) Der Druckwasserreaktor

Die Abb. I, 8 zeigt die Skizze eines im Prinzip einfachen Reaktors, des Druckwasserreaktors.

Der Druckwasserreaktor besteht im wesentlichen aus dem eigentlichen Reaktor, das ist in diesem Falle ein druckfester Kessel, der mit Wasser gefüllt ist und in seinem Inneren den Brennstoff und die Regeleinrichtung enthält, und einem Sekundärteil, enthaltend einen Wärmetauscher, durch den das im Reaktor erhitzte Wasser gepumpt wird und der seine Wärme auf irgendeine Weise, etwa durch Dampferzeugung, abgibt. An den Wärmetauscher bzw. den Dampferzeuger ist dann der konventionelle Teil des Kraftwerks angeschlossen, der uns aber hier nicht weiter interessiert.

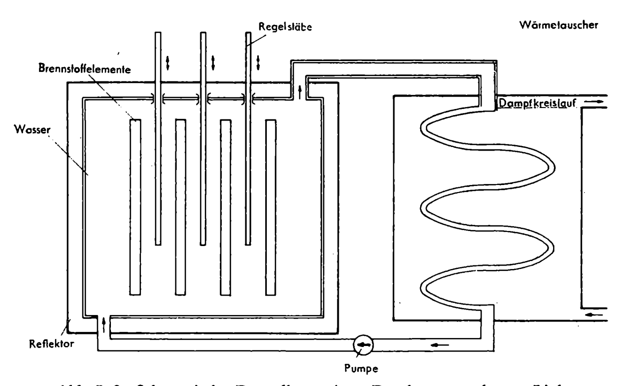


Abb. I, 8. Schematische Darstellung eines Druckwasserreaktors. Links das mit Wasser gefüllte Reaktorgefäß, rechts der Wärmetauscher, der den Dampf für die Wärmemaschine liefert. Das Reaktorgefäß enthält die Brennstoffelemente und die in senkrechter Richtung verschiebbaren Regelstäbe

Der Brennstoff, das Uran, ist in diesem Falle in der Form von Stangen in den Reaktor eingesetzt. Uran wird meistens in seiner metallischen Grundform verwendet, neuerdings jedoch auch manchmal in Form einer Verbindung wie Uranoxyd oder Urankarbid. Die Brennstoffstäbe sind überzogen von einer metallischen Hülle, meistens Aluminium und ähnliche Metalle oder auch Stahl. Dieses sogenannte Canning hat die Aufgabe, die bei der Uranspaltung anfallenden, für den menschlichen Organismus schädlichen radioaktiven Spaltprodukte im Brennstoff zurückzuhalten und sie nicht in das Kühlwasser geraten zu lassen, wo sie z. B. bei etwa notwendigen Reparaturen, Menschen gefährden könnten. An die Brennstoffumhüllungen müssen verschiedene Anforderungen gestellt werden, die die Techniker vor recht schwierige

Probleme stellen. Das Canningmaterial muß erstens bei möglichst hoher Temperatur mechanisch widerstandsfähig sein, zweitens muß es die Fähigkeit haben, die im Brennstoff entstehende Wärmeenergie aus dem Brennstoffbereich in das Wasser gut zu übertragen. Drittens muß es gegenüber Neutroneneinwirkung beständig sein und viertens soll es möglichst wenig Neutronen absorbieren. Zur besseren Wärmeübertragung versieht man die Umhüllungen meistens mit Rippen, die die wirksame Wärmeübertragungsfläche vergrößern.

Die bei der Kernspaltung im Inneren der Brennstoffelemente freiwerdenden Spaltungsneutronen werden innerhalb der Brennstoffelemente fast nicht absorbiert, können sich also dort weitgehend ungehindert bewegen; denn ihre Geschwindigkeiten sind so groß, daß sowohl Spaltungen als auch Resonanzeinfänge nur in sehr geringem Maße möglich sind. Auch verlieren sie durch Zusammenstöße mit den schweren Urankernen nicht viel Bewegungsenergie. Sie gelangen also nach kurzer Zeit im allgemeinen aus dem Brennstoffbereich durch die Umhüllung als „schnelle“ Neutronen in das den Brennstoff umgebende Wasser. Dort aber werden sie, da Wasser aus den leichten Atomen Wasserstoff und Sauerstoff besteht, durch Zusammenstöße mit diesen im allgemeinen verhältnismäßig rasch, d.h. nachdem sie sich einige Zentimeter vom Brennstoffelement entfernt haben, abgebremst. Die Abbremsung geht natürlich nur solange, bis die Neutronen thermisch geworden sind, d.h. bis ihre mittlere Bewegungsenergie gleich der der Wassermoleküle ist.

Das Wasser übernimmt somit neben der Aufgabe des Wärmeabtransportes aus dem Reaktor noch die der Abbremsung der Spaltungsneutronen zu thermischen Neutronen, also die des Moderators.

Die thermischen Neutronen diffundieren nun weiterhin im Moderator fort, bis sie zufällig einmal wieder in ein Brennstoffelement gelangen. Dort können sie, da sie ja nun thermisch sind, Spaltungen bewirken, wodurch neue Neutronen als Spaltungsneutronen gewonnen werden und der eben beschriebene Zyklus von neuem beginnt.

Leider ist der Neutronenzyklus nicht so geschlossen, wie er jetzt dargestellt wurde. Ein Teil der Neutronen geht jeweils verloren.

Unmittelbar nach dem Entstehen der Spaltungsneutronen droht diesen, solange sie sich im Brennstoff aufhalten, wie schon gesagt, keine große Gefahr. Während des Abbremsprozesses im Moderator aber wird doch hin und wieder einmal ein Neutron entweder von Moderatorkernen selbst oder aber von Verunreinigungen, sogenannten Giftstoffen, eingefangen. Zweitens kann es vorkommen, daß ein Neutron während des Abbremsprozesses im Resonanzenergiebereich zufällig wieder in den Brennstoffbereich gerät und dort durch Resonanzabsorption z.B. von einem Uran-238-Kern eingefangen wird. Drittens können solche Absorptionen durch den Brennstoff ohne Spaltung ja auch im thermischen Bereich vorkommen. Viertens wird ein Teil der Neutronen durch die Wände des Reaktors ausdiffundieren. Um den Anteil dieser ausdiffundierenden Neutronen herabzusetzen, umgibt man das Reaktorcore — das ist der bis jetzt besprochene Bereich des Reaktors, der den Brennstoff, die Regelstäbe und den Moderator enthält — mit einem sogenannten Reflektor. Der Reflektor besteht aus einem Material, das, ebenso wie der Moderator, Neutronen streuen, aber nicht absorbieren soll. Er hat die Aufgabe, einen Teil der Neutronen, die durch die Wände des Cores ausfließen, durch Streuprozesse wieder in das Core zurückdiffundieren zu lassen.

Ein sehr wichtiges Element jedes Reaktors ist seine Regeleinrichtung, bestehend aus den in der Abb. I, 8 eingezeichneten Regelstäben und einem Antriebsmechanismus. Die Regelstäbe bestehen aus einem Neutronen-absorbierenden Material. Sie ragen teilweise in das Reaktorcore hinein, und von der Eintauchtiefe ist ihre Neutronenabsorptionsfähigkeit abhängig.

Die Aufgabe der Regelstäbe ist die Steuerung der Neutronenbilanz im Reaktor und damit, allerdings nur indirekt, der Leistung. Wir sahen ja, daß bei jeder Spaltung eines Urankerns zwei bis drei Neutronen neu entstehen. Davon wird ein Teil vom Brennstoff eingefangen, ohne eine Spaltung zu bewirken, ein Teil vom Moderator, ein dritter Teil fließt aus und ein Teil wird von den Regelstäben absorbiert. Eines der bei jeder Spaltung entstehenden Neutronen wird wieder für eine neue Spaltung gebraucht. Dieses Neutron sorgt dafür, daß der Betrieb des Reaktors aufrecht erhalten bleibt; denn würde weniger als ein Neutron je

Spaltung übrigbleiben, so würde der Reaktor mit der Zeit verlöschen, bliebe mehr als ein Neutron übrig, so würde sich die Anzahl der Reaktionen je Zeiteinheit ständig vergrößern, d.h. die Wärmeentwicklung würde zunehmen, und der Reaktor würde in kurzer Zeit zerstört sein. Es darf also, damit der Reaktor stationär läuft, je Spaltung genau nur ein Neutron für die nächste Spaltung übrigbleiben, alle anderen Neutronen müssen auf irgendeine Weise vernichtet werden. Die Aufgabe der Vernichtung überschüssiger Neutronen übernehmen die Regelstäbe. Ihre Eintauchtiefe muß zu jeder Zeit der oben genannten Forderung des stationären Reaktorbetriebes entsprechen.

Man nennt die Lebensgeschichte eines Neutrons vom Augenblick seiner Entstehung als Spaltungsneutron an über den Abbremsvorgang bis zu seiner Absorption durch einen spaltbaren Kern und die dadurch bewirkte Neuentstehung von Spaltungsneutronen den „Neutronenzyklus“ und die Aufeinanderfolge dieser Neutronenzyklen die „Kettenreaktion“.

Einen Reaktor der eben beschriebenen Art, bei dem die Brennstoffbereiche räumlich vom Moderatorbereich getrennt sind, nennt man einen „heterogenen“ Reaktor. In einem „homogenen“ Reaktor ist der Brennstoff mit dem Moderator durchmischt. Die Unterschiede zwischen diesen beiden Reaktortypen in ihren vielfältigen Erscheinungsformen sind im wesentlichen technologischer Art. Bezüglich der Neutronenökonomie ist der heterogene Reaktor dem homogenen Reaktor etwas überlegen, was z.B. zur Folge hat, daß man einen homogenen Reaktor mit natürlichem Uran und Graphit als Moderator nicht bauen kann, weil der Anteil an spaltbarem Uran-235 für die Neuproduktion von Spaltungsneutronen je Zyklus nicht ausreicht. Ein heterogener Reaktor mit natürlichem Uran und Graphit ist jedoch möglich.

Wir sehen also, daß drei Faktoren für die Neutronenbilanz von besonderer Wichtigkeit sind. Das ist erstens die Reaktoroberfläche wegen des Neutronenausflusses, zweitens der Brennstoff wegen des Resonanzeinfanges im $Uran_{238}$, drittens der Moderator wegen seiner Bremsfähigkeit und seines schädlichen Neutroneneinfanges. Man wird demnach wegen des ersten Faktors die Reaktoroberfläche im Verhältnis zum Volumen möglichst klein, das bedeutet aber, den Reaktor — es ist jetzt nur das Reaktorcore gemeint —

möglichst groß machen. Andererseits wird man aus technischen und wirtschaftlichen Gründen immer bestrebt sein, den Reaktor klein zu halten. Allgemein kann man sagen, daß man einen Reaktor um so kleiner bauen kann, je besser man mit Neutronen haushalten versteht.

Eine Möglichkeit, die Neutronenökonomie zu verbessern, besteht in der Verwendung angereicherten Urans. Je größer das Verhältnis $Uran_{235}$ zu $Uran_{238}$ ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron während des Abbremsprozesses in den Resonanzspitzen des $Urans_{238}$ eingefangen wird. Je größer also die Anreicherung an $Uran_{235}$ gemacht wird, desto kleiner kann der Reaktor gebaut werden. In dieser Hinsicht ist natürliches Uran ein ungünstiger Brennstoff.

Drittens ist für die Neutronenökonomie die Wahl des Moderators wichtig. Der beste Moderator ist schweres Wasser (D_2O). Er absorbiert fast keine Neutronen und hat ein sehr gutes Bremsvermögen. Leichtes Wasser bremst zwar Neutronen noch besser als schweres Wasser, hat aber auch ein starkes Absorptionsvermögen. Graphit bremst bei weitem nicht so gut, hat aber den Vorteil, temperaturbeständig und außerdem ein fester Stoff zu sein.

Schließlich beeinträchtigen noch Giftstoffe und Brut- oder Konversionsstoffe den Neutronenhaushalt.

Giftstoffe sind Neutronenfänger, die Neutronen nutzlos absorbieren. Sie können entweder in der Form von Verunreinigungen von vornherein in den Reaktor eingebaut worden sein oder auch erst im Laufe des Reaktorbetriebes, meist als Spaltprodukte, entstanden sein. Die letztere Art von Giftstoffen häuft sich immer in einem Reaktor an, wenn nicht von Zeit zu Zeit der Brennstoff aufbereitet, d.h. von diesen schädlichen Stoffen gereinigt wird. In manchen Reaktoren geschieht diese Reinigung kontinuierlich, in anderen in bestimmten Zeitabständen. In jedem Falle ist die Brennstoffaufbereitung mühsam und kostspielig.

Brut- und Konversionsstoffe haben wir bereits im $Thorium_{232}$ und im $Uran_{238}$ kennengelernt. Von einem Brutstoff spricht man, wenn der durch den Neutroneneinfang entstehende neue Brennstoff der gleiche ist wie der, mit dem der Reaktor betrieben wird. Thorium ist also dann ein Brutstoff, wenn der Brennstoff $Uran_{233}$ ist. Ein Konversionsstoff ist hingegen $Uran_{238}$, wenn der Reaktor

nicht mit $Plutonium_{239}$, sondern mit $Uran_{235}$ betrieben wird. Hier stimmt der neuentstehende Stoff nicht mit dem Brennstoff überein. Will man neuen Brennstoff brüten oder konvertieren, dadurch daß man Thorium oder $Uran_{238}$ in den Reaktor bringt, so zweigt man dadurch einen Teil der Neutronen für diesen Zweck ab. Die Neutronenökonomie wird also schlechter, aber man gewinnt dafür neuen Brennstoff. Ein Maß für den Brennstoffgewinn ist der sogenannte Brut- bzw. Konversionsfaktor.

b) Der Siedewasserreaktor

Dem Druckwasserreaktor sehr ähnlich ist der Siedewasserreaktor. Er ist ebenfalls heterogen. Im Siedewasserreaktor geschieht die Dampferzeugung im Reaktorcore selber, nicht im Wärmetauscher. Dadurch wird dieser Reaktor im Aufbau einfacher als der Druckwasserreaktor. Man spart den Wärmetauscher und braucht auch den ganzen Reaktorteil nicht für den hohen Druck auszulegen, der für den Druckwasserreaktor notwendig ist. Andererseits nimmt man auch wieder einige Nachteile in Kauf. So fällt mit dem Wärmetauscher auch ein sehr wirksamer Schutz des Dampfkreislaufes gegen radioaktive Spaltprodukte fort. Das Canning der Brennstoffelemente ist als Abschirmung nicht so zuverlässig. Außerdem ist die durch die Entstehung der Dampfblasen an der Oberfläche der Brennstoffelemente geförderte Korrosion des Canningmaterials recht problematisch. Ein Vorteil des Siedewasserreaktors liegt wiederum in seiner Fähigkeit, sich teilweise selbst zu regeln. Wird nämlich die Temperatur im Core einmal zu hoch, so verdampft entsprechend mehr Wasser als im Normalbetrieb, und das Wasser, das ja gleichzeitig als Moderator dient, wird durch die aufsprudelnden Dampfblasen aufgelockert. Diese Verminderung der mittleren Moderatordichte bewirkt eine Störung der Kettenreaktion solange, bis sich der Zustand im Core wieder normalisiert hat, bzw. bis der Regelmechanismus die Störung wieder ausgeglichen hat.

c) Der gasgekühlte Graphitreaktor

Eine dritte Art eines heterogenen Reaktors ist der gasgekühlte Reaktor vom Typ Calder Hall. Der Calder-Hall-Reaktor wird mit natürlichem Uran betrieben. Der Moderator ist Graphit und das

Kühlgas Kohlendioxyd. Das Core besteht aus einem großen zylindrischen Graphitklotz, der von Kanälen durchzogen ist. Konzentrisch in diesen Kanälen sind in Form von Stangen die Brennstoffelemente so angebracht, daß zwischen Brennstoffelement und Kanalwand ein freier Spalt bleibt, durch den das Kühlgas strömt, das die Wärmeenergie dann an Wärmetauscher außerhalb des Reaktorcores abgibt. Regeleinrichtung, Reflektor usw. sind ähnlich angeordnet wie bei dem oben besprochenen Druckwasserreaktor.
Der gasgekühlte Reaktor hat gegenüber dem flüssigkeitsgekühlten den Vorteil, daß keine Korrosionsprobleme auftreten. Außerdem verträgt er im allgemeinen höhere Temperaturen. (Im Hinblick darauf ist Kohlendioxyd nicht einmal ein sehr geeignetes Gas.) Ein Nachteil ist dagegen der hohe Eigenbedarf in Form von Gebläseenergie zum Umwälzen des Kühlgases; denn die Wärmeübertragungseigenschaften von Gasen sind durchweg viel schlechter als die von Flüssigkeiten. Um die nötige Wärmeenergie abzuführen, muß man also das Kühlgas ziemlich schnell strömen lassen. Dadurch entsteht die hohe Gebläseleistung. In dieser Hinsicht ist Kohlendioxyd wieder ein günstiges Kühlgas. Um das Verhältnis von Wärmeübertragung zu Gebläseverlust heraufzusetzen, erhöht man den Gasdruck. Dem ist aber natürlich durch die Festigkeit der Gefäßwände eine Grenze gesetzt. Dabei kommt erschwerend hinzu, daß gasgekühlte Reaktoren meistens groß sind. Das liegt daran, daß man für den Moderator fast allein auf Graphit angewiesen ist, dessen Moderatoreigenschaften ja nicht besonders gut sind. Die Folge davon ist, daß man das Core verhältnismäßig groß bauen muß, um eine Kettenreaktion aufrechtzuerhalten. Im Falle des Calder-Hall-Reaktors kommt noch hinzu, daß der Brennstoff natürliches Uran mit dem großen Anteil an nicht spaltbarem Uran_{238}, also auch einen nicht sehr günstigen Brennstoff enthält. So ist der Durchmesser des Calder-Hall-Cores etwa 10 m, während man bei Reaktoren, deren Moderator schweres Wasser ist, bei natürlichem Uran mit einem Viertel dieser Größe auskommt.

d) Der homogene Reaktor

Unter den homogenen Reaktoren spielt vor allem der homogene Flüssigkeitsreaktor eine Rolle. In ihm ist der stark angereicherte

Brennstoff als Salz in Wasser gelöst. Das Wasser kann dabei, wie beim Druckwasserreaktor, als Moderator und gleichzeitig als Kühlmittel dienen. Das Core mit der Brennstoffflüssigkeit ist meist umgeben von einem Graphitreflektor.
Der homogene Flüssigkeitsreaktor hat — abgesehen davon, daß er viel einfacher zu berechnen ist — den Vorteil der einfachen Corestruktur. Er enthält keine Brennstoffelemente, die ausgewechselt werden müßten. Die Aufarbeitung der Brennstoffflüssigkeit geschieht in Gefäßen, die an den Kühlkreislauf angeschlossen sind. Außerdem kann man diesen Reaktor so bauen, daß er sich nach dem gleichen Prinzip selbst regelt wie der Siedewasserreaktor. Eine zusätzliche Regelung kann man in sehr einfacher Weise dadurch erreichen, daß man die Brennstoffflüssigkeit konzentriert bzw. verdünnt. Nachteile dieses Reaktortyps entstehen vor allem durch Korrosionsprobleme. Zudem tritt noch eine Zersetzung des Wassers in Knallgas infolge der Strahlungen auf. Man muß also Vorkehrungen treffen, um eine Explosion zu verhindern.

e) Flüssig-Metall-Reaktor

In diesem Reaktor wird als Wärmeübertragungsmittel Wismut, in dem hochkonzentriertes Uran-235 oder Uran-233 aufgelöst ist, verwendet. Leider läßt sich das Uran selbst auch bei hohen Temperaturen in nur geringen Prozentsätzen in Wismut lösen. Es wird versucht, diese Lösbarkeit durch Zusätze zum Wismut, etwa von Blei oder Zinn, zu heben.
Natürlich sind die Materialprobleme eines Wismutkreislaufes bei hoher Temperatur noch sehr zahlreich. Wenn diese aber lösbar sein sollten, wird dieser Reaktor neben einer hohen Leistungsdichte auch eine gute Brutrate für den Uran-233-Thorium-232-Brutzyklus aufweisen.

f) Natrium-Graphit-Reaktor

Die Wärmeübertragung in Reaktoren durch Natrium ist besonders günstig, weil sie einen sehr kleinen Eigenbedarf erfordert. Deswegen ist die dem Natrium-Graphit-Reaktor eigene hohe spezifische Leistungsdichte für diesen Reaktortyp besonders attraktiv. Die Materialschwierigkeiten scheinen aber sehr beträchtlich zu sein. Die Brennstoffelemente sind so gebaut, daß ein Element in

einem Zirkoncanning gleichzeitig Brennstoff und Moderator enthält. Neben den Korrosions- und Erosionsproblemen im Natriumkreislauf ist noch besonders das Problem des Eindringens von Natrium in den porösen Graphit zu erwähnen, wodurch die schädliche Neutronenabsorption im Moderator erhöht wird. Man versucht dieses Problem durch Verwendung von Graphit mit besonders hoher Dichte zu lösen.

Für das Umpumpen des flüssigen Natriums wurden besondere elektromagnetische Pumpen entwickelt.

Das flüssige Natrium wird im Reaktor stark aktiviert. Es wird also mit dem ersten Kühlkreislauf Aktivität aus dem Reaktor herausgeschleppt. In den meisten Fällen wird es daher notwendig, einen sekundären Na-Kreislauf einzubauen, um zu verhindern, daß radioaktive Materialien in den Dampfkreislauf eindringen können. Durch mehrere Kreisläufe wird natürlich der Reaktor teuer. Es muß sich in der Zukunft herausstellen, ob die hohe Leistungsdichte den hohen Investierungspreis des Natrium-Graphit-Reaktors rechtfertigen kann.

g) Reaktor mit Moderator aus organischer Flüssigkeit

In diesem Reaktor werden metallische Brennstoffelemente und als Moderator und Kühlmittel eine organische Flüssigkeit verwendet. Die organische Flüssigkeit macht es möglich, daß man eine relativ hohe Temperatur von etwa 300—350°C ohne Anwendung eines erhöhten Druckes erhält. Der Nachteil eines solchen Reaktors liegt vor allen Dingen darin, daß die organische Flüssigkeit durch die Strahlungseinwirkung zerstört wird und ständig regeneriert werden muß.

h) Schneller Brutreaktor

Plutonium-239 ist bei der Verwendung von schnellen Neutronen in der Neutronenökonomie ergiebiger als die beiden anderen Spaltstoffe. Es erscheint deswegen aussichtsreich, in der Zukunft sogenannte schnelle Reaktoren mit diesen Brennstoffen zu bauen. Ein solcher Reaktor wäre besonders zum Brüten neuen Brennstoffs geeignet. Von diesem Standpunkt aus scheint er für die Zukunft sehr attraktiv zu sein. Die auftretenden technischen Schwierigkeiten sind heute noch beträchtlich, obgleich

auf physikalischem Gebiet alle Vorgänge des schnellen Reaktors bekannt sind. Das Plutonium selbst ist nicht in metallischer Form brauchbar, weil sein Schmelzpunkt zu niedrig ist. Deshalb ist daran gedacht worden, Plutonium als flüssiges Metall zu verwenden, wobei es gleichzeitig Brennstoff und Wärmeübertragungsmittel ist. Es müßten dann noch einige Metalle zulegiert werden, um den Schmelzpunkt dieser metallischen Lösung herabzusetzen.
Weiter wird daran gedacht, das Plutonium mit irgendwelchen anderen Metallen zu legieren und dann als feste Legierung im Reaktor zu verwenden.
Die Probleme des Baues des schnellen Brutreaktors liegen also in der Hauptsache in der Materialerforschung.
In der folgenden Tabelle I, 9 sind einige Reaktoren mit ihren Eigenschaften aufgeführt.

II. DIFFUSIONS- UND BREMSTHEORIE

1. Der Wirkungsquerschnitt

Während wir im ersten Paragraphen die kernphysikalischen Vorgänge, die sich in einem Reaktor abspielen, nur qualitativ und als Einzelprozesse betrachtet haben, sollen im folgenden diese Dinge quantitativ und makroskopisch gesehen beschrieben werden. Makroskopisch soll dabei heißen, daß wir im allgemeinen nicht mehr wie bisher einzelne Neutronen und Atome betrachten, sondern eine große Schar von Neutronen in der Materie, mit der sie in Wechselwirkung stehen.
Der Wirkungsquerschnitt wurde bereits mehrfach als ein Maß für die Reaktionswahrscheinlichkeit zwischen einem Neutron und einem Atomkern erwähnt. Dieser Begriff soll jetzt genauer gefaßt werden.
Wir denken uns eine stetig strahlende, punktförmige Neutronenquelle eingebaut in ein mit Neutronen reagierendes Material gleichmäßiger Dichte, deren Atome also im Mittel den gleichen Abstand voneinander haben. Die Neutronen mögen die Quelle in radialer Richtung verlassen und solange in dieser Richtung weiterfliegen, bis sie mit einem Kern zusammentreffen und von ihm absorbiert oder auch gestreut werden, je nach der Art der Reaktionsbereitschaft des Kerns. Dabei muß, wie schon besprochen wurde, das

Tabelle I, 9

	Brennstoff	Brutstoff	Moderator	Kühlmittel	Temperatur	Brut- bzw. Konversionsfaktor	Regeleinrichtung
1. Calder-Hall-Reaktor	nat. Uran	U^{238} (im nat. Uran)	Graphit	CO_2	$< 400°$ C	mittel	Kontrollstäbe
2. Druckwasser-Reaktor	nat. Uran bzw. schwach anger. U in Metall od. UO_2-Form	U^{238} bzw. Th^{232}	D_2O bzw. H_2O	D_2O bzw. H_2O	$< 350°$ C	klein bis mittel	Kontrollstäbe
3. Siedewasser-Reaktor	nat. Uran bzw. schwach anger. U. in Metall od. UO_2-Form	U^{238} bzw. Th^{232}	D_2O bzw. H_2O	D_2O bzw. H_2O	$< 350°$ C	klein bis mittel	Kontrollstäbe
4. Natrium-Graphit-Reaktor	schwach anger. Uranmetall	U^{238} bzw. Th^{232}	Graphit	Natrium	$< 700°$ C	klein	Kontrollstäbe
5. Schneller Brutreaktor	Pu^{239}-Metall?	U^{238} (im nat. Uran)	keiner	Natrium bzw. Wismut	$< 700°$ C	groß	Reflektorregelung Kontrollstäbe aus nat. Uran
6. Homogener Reaktor	mittel bis hoch anger. Uran in UO_2SO_4-Lösg. oder UO_2-Suspension	Th^{232}	D_2O bzw. H_2O	D_2O bzw. H_2O	$< 350°$ C	groß	Brennstoffkonzentrationsänderung
7. Flüssigmetall-Reaktor	hoch anger. Uran in Metallform	Th^{332}	Graphit Beryllium	Wismut bzw. Natrium	$< 700°$ C	mittel bis groß	Brennstoffkonzentrationsänderung
8. Gasgekühlter Reaktor mit geschlossener Gasturbine	schwach bis mittel anger. Uran in UO_2-Form	U^{238} bzw. Th^{232}	Graphit	CO_2, He	$< 650°$ C	klein bis mittel	Kontrollstäbe
9. Reaktor mit Moderator aus organ. Flüssigkeit	schwach bis mittel anger. Uranmetall	U^{238} bzw. Th^{232}	organ. Flüssigkeit	organ. Flüssigkeit	$< 350°$ C	klein bis mittel	Kontrollstäbe

Tabelle I, 9 (Fortsetzung)

Canning	Brennstoff-aufarbeitung	Strahlungs-schäden Korrosions-probleme	Entwicklungs-arbeiten, techn. Schwierigkeiten	Materialkosten	Sicherheit
Mg-Al-Metall	außerhalb des Atomkraft-werkes, relativ teuer	unerheblich keine	keine keine	große Kosten f. U, Graphit u. Wärme-austauscher	große Stabilität
Al, Zr, Fe, Metall	außerhalb des Kraftwerkes, relativ teuer	unerheblich keine	keine keine	große Kosten f. D_2O und Druckkessel	große Stabilität
Al, Zr, Fe, Metall	außerhalb des Kraftwerkes, relativ teuer	unerheblich Korrosionsprobl. durch die Ver-dampfung d. Wassers bedingt	keine keine	große Kosten für D_2O	große Stabilität
Fe, Zr, Metall	außerhalb des Kraftwerkes, relativ teuer	unerheblich Korrosion und Erosion im Na-Kreislauf	Vergrößerung d. Graphitdichte um Absorpt. d. Na im Graphit zu unterbinden	rel. hohe Kost. f. d. Herst. u. Unterhaltung d. Na-Kreislaufes	Aktivierung des Primär-kreislaufes
Fe, Zr, Metall	außerhalb des Kraftwerkes, relativ teuer	Strahlungsschäden Korrosions- und Erosions-erscheinung im Na-Kreislauf	Untersuchung d. Verhaltens von Pu-Metall und Na-Bi im Kreis-laufsystem	hohe Brenn-stoffkosten	wegen hoher Leistungs-dichte un-empfindlich
keinen	im Kraftwerk, relativ billig	Starke Wasser-verseuchung Korrosion der Behälter	Auffinden von korrosionsfesten Materialien Chem. Aufbereit. d. Spaltprodukte	Hohe D_2O-Kosten	sehr stabil
keinen	im Kraftwerk, relativ billig	Korrosion und Erosion im Metallkreislauf	Untersuchung v. flüssig. Metallen im Kreislauf-system	—	stabil
Zr, Fe, Metall	außerhalb des Kraftwerkes, relativ billig	unerheblich keine	Entwicklung eines haltbaren Cannings	relativ niedrig	sehr stabil
Zr, Fe, Al, Metall	außerhalb des Kraftwerkes relativ teuer	Verseuchung des Moderators und Polymerisation	keine	relativ niedrig	sehr stabil

Neutron den Kern nicht unmittelbar treffen, um mit ihm zu reagieren. Es genügt im allgemeinen, wenn es in seine Nähe kommt. Der Kern ist von einer Art Kraftfeld umgeben, das das Neutron anzieht bzw. abstößt, wenn es in seinen Wirkungsbereich gerät. Den Flächenquerschnitt dieses Kraftfeldes, der im allgemeinen von der Neutronengeschwindigkeit abhängt (siehe Abschn. I, 2a und b), nennt man den Wirkungsquerschnitt.

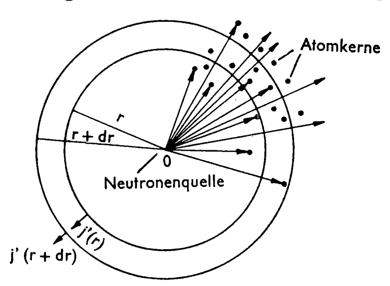


Abb. II, 1. Zur Ableitung des Wirkungsquerschnittes. Die konzentrischen Flächen $4\pi r^2$ und $4\pi(r+dr)^2$ schließen das Volumelement $4\pi r^2 dr$ ein. Die Neutronenquelle ist im Zentrum ($r = 0$) angebracht. Die Pfeile deuten die geradlinige Flugbahn der von der Quelle ausgehenden Neutronen an, die Punkte stellen die Atomkerne dar, mit denen die Neutronen kollidieren können

Unser Ziel ist jetzt, auszurechnen, wie groß die mittlere Entfernung ist, die die Neutronen von der Quelle kommend geradlinig bis zu ihrer ersten Reaktion mit einem Kern zurücklegen können. Wir führen noch eine Hilfsgröße ein, die Neutronenstromdichte. Das ist die Anzahl der Neutronen, die je Sekunde eine Fläche von einem Quadratzentimeter durchlaufen, also die Neutronenzahl pro sec und pro cm².

In einem Abstand r von der Neutronenquelle (Abb. II, 1) sei die Neutronenstromdichte $j'(r)$[1], so daß die Anzahl der Neutronen, die die Kugelfläche $4\pi r^2$ je Sekunde durchlaufen

$$4\pi r^2 j'(r) \tag{II, 1}$$

ist. Durch die etwas größere Kugelfläche $4\pi(r+dr)^2$ fließen je Sekunde

$$4\pi(r+dr)^2 j'(r+dr). \tag{II, 2}$$

Neutronen. Das ist etwas weniger, weil in dem durch die Flächen $4\pi r^2$ und $4\pi(r+dr)^2$ eingeschlossenen Volumen $4\pi r^2 dr$ einige Neutronen mit Kernen kollidiert sind, also absorbiert oder gestreut wurden. In beiden Fällen endet in der Kugelschale $4\pi r^2 dr$

[1] Diese Größe j' ist nicht zu verwechseln mit der im Abschn. II, 2 vorkommenden Diffusionsstromdichte j.

ihr geradliniger Weg von der Quelle her, und nur diesem geradlinigen Weg eines Neutrons bis zur ersten Reaktion mit einem Kern gilt ja unser Interesse. Ist N die Anzahl der streuenden oder der absorbierenden Atome je cm^3, so ist nach der Definition des Wirkungsquerschnittes des Einzelatoms, den wir mit σ bezeichnen wollen, die Anzahl der je Sekunde im Volumen $4\pi r^2 dr$ reagierenden Neutronen:

$$\sigma N j' \, 4\pi r^2 \, dr. \tag{II, 3}$$

Diese Anzahl muß gleich der Differenz aus der durch die Fläche $4\pi r^2$ in das Volumenelement $4\pi r^2 dr$ eintretenden und der aus der Fläche $4\pi (r + dr)^2$ ausfließenden Neutronen sein:

$$4\pi r^2 j' - 4\pi (r + dr)^2 (j' + dj') = \sigma N j' \, 4\pi r^2 \, dr,$$

d. h.

$$\frac{d(r^2 j')}{dr} = -\sigma N r^2 j'. \tag{II, 4}$$

oder integriert:

$$j' = \frac{A}{r^2} e^{-\sigma N r}. \tag{II, 5}$$

Darin ist A eine Normierungskonstante. Die Neutronenstromdichte j' nimmt also mit wachsendem Abstand von der Quelle ab.

Wir fragen jetzt nach dem Weg, den die Neutronen im Mittel geradlinig zurücklegen, bis sie mit Kernen reagieren. Nach der üblichen Mittelungsvorschrift ist das

$$\bar{r} = \frac{\int\limits_0^\infty r \frac{A}{r^2} 4\pi r^2 e^{-\sigma N r} \, dr}{\int\limits_0^\infty \frac{A}{r^2} 4\pi r^2 e^{-\sigma N r} \, dr} = \frac{\int\limits_0^\infty r e^{-\sigma N r} \, dr}{\int\limits_0^\infty e^{-\sigma N r} \, dr}. \tag{II, 6}$$

Da solche Integralquotienten im folgenden öfter vorkommen, soll hier eine einfache Lösungsmethode gezeigt werden. Nennen wir

$$f(\sigma N) = \int\limits_0^\infty e^{-\sigma N r} \, dr = \frac{1}{\sigma N},$$

so kann man die Gl. (II, 6) schreiben:

$$(II, 7) \qquad \bar{r} = \frac{-\frac{df}{d(\sigma N)}}{f} = \frac{\frac{1}{(\sigma N)^2}}{\frac{1}{\sigma N}} = \frac{1}{\sigma N}.$$

Die Länge $\bar{r} = \frac{1}{\sigma N}$, die Strecke, die ein Neutron im Mittel zurücklegt bis es eine Kernreaktion macht, heißt die mittlere freie Weglänge und wird mit λ bezeichnet:

$$\lambda = \bar{r} = \frac{1}{\sigma N}.$$

Die mittlere freie Weglänge ist also der Dichte des Materials und dem Wirkungsquerschnitt σ umgekehrt proportional.

Das Produkt $\sigma \cdot N$ ist auch ein Wirkungsquerschnitt und zwar, weil N die Anzahl der Atome im cm^3 ist, der Wirkungsquerschnitt eines cm^3 Materie. Er wird mit Σ bezeichnet. Man nennt σ, den Wirkungsquerschnitt des Einzelatoms, den „Mikroskopischen Wirkungsquerschnitt", und Σ, in dem die Materialdichte enthalten ist, den „Makroskopischen Wirkungsquerschnitt". Es ist also

$$(II, 8) \qquad \lambda = \bar{r} = \frac{1}{\sigma N} = \frac{1}{\Sigma}.$$

Je nach der Art der Reaktion unterscheidet man verschiedene Arten der mittleren freien Weglänge, des mikroskopischen, und des makroskopischen Wirkungsquerschnittes. Die mittlere freie Streuweglänge z. B. ist der Weg, den ein Neutron zwischen zwei Zusammenstößen mit Moderatorkernen zurücklegt usw. Man versieht die einzelnen Größen zur Kennzeichnung ihrer Art mit Indizes. So ist z. B. σ_a der mikroskopische Absorptionsquerschnitt, Σ_{sp} der makroskopische Spaltungsquerschnitt, λ_s die mittlere freie Streuweglänge.

In Mischungen verschieden reagierender Materialien verlieren Begriffe wie „mittlere freie Weglänge" streng genommen ihren physikalischen Sinn, z. B. bei einer Mischung von Brennstoff und Moderator. Man rechnet trotzdem auch in solchen Fällen sehr häufig mit diesen Größen, aber so, daß man sie in ein Verhältnis zueinander setzt und dadurch die Wahrscheinlichkeitsverteilung

für die verschiedenen Reaktionen kennzeichnet. So ist z.B. in einem Brennstoff-Moderator-Gemisch Σ_a/Σ_s das Verhältnis der im Gemisch absorbierten zu den gestreuten Neutronen.

Die hier verwendete Neutronenstromdichte j' diente nur zur Erklärung der mittleren freien Weglänge und der makroskopischen Wirkungsquerschnitte, sonst aber wird sie in der Reaktorphysik nicht verwendet, wohl aber eine ihr sehr ähnliche Größe, der Neutronenfluß. Er hat die gleiche Dimension wie die Neutronenflußdichte j'. Er mißt auch die Anzahl der Neutronen, die je sec eine Fläche von 1 cm² durchlaufen, hat aber im Gegensatz zu j' keine Vorzugsrichtung, sondern ist rein statistischer Art. Denken wir uns einen Kubikzentimeter eines idealen Moderators, in dem also keine Neutronen absorbiert, sondern nur gestreut werden. Der Moderator sei mit den Neutronen im thermischen Gleichgewicht, so daß die Neutronengeschwindigkeit im Mittel zeitlich konstant ist. Die Anzahl der in dem Kubikzentimeter enthaltenen Neutronen sei n. Diese Neutronen fliegen nun ganz ungeordnet in allen möglichen Richtungen, aber doch mit einer im Mittel einheitlichen Geschwindigkeit $\bar{v}$, z.B. der thermischen Geschwindigkeit, zwischen den Moderatorkernen umher. Die Moderatorkerne mögen einen Streuwirkungsquerschnitt σ_s haben und die mittlere freie Streuweglänge λ_s. Wir können uns unser Modell dann so idealisiert denken, daß jedes Neutron immer nach Zurücklegen einer Strecke λ_s mit einem Moderatorkern zusammenstößt, Die Zeit zwischen zwei Stößen sei $\tau = \frac{\lambda_s}{\bar{v}}$. Die Anzahl der Stöße, die sich je Sekunde in dem Kubikzentimeter ereignen, ist dann

(II, 9) $$\frac{n}{\tau} = \frac{n\,\bar{v}}{\lambda_s} = n\,\bar{v}\,\Sigma_s\,.$$

Das Produkt $n\bar{v}$ nennt man den Neutronenfluß Φ.

(II, 10) $$\Phi = n\bar{v}\,.$$

Daß Φ keine Vorzugsrichtung hat, wie die Stromdichte j', liegt an der statistischen Richtungsverteilung von $\bar{v}$. Φ ist vielmehr, da ja $\bar{v}$ eine nur von der Neutronentemperatur abhängige Konstante ist, ein Maß für die Anzahl der freien Neutronen im Kubikzentimeter.

Das Produkt $\Sigma_s \cdot \Phi$ oder allgemein $\Sigma \cdot \Phi$ ist eine Größe, mit der wir im folgenden sehr oft rechnen werden. Sie ist nach der Gl. (II, 9):

(II, 11) $\Sigma \cdot \Phi =$ Anzahl der Neutronenreaktionen je cm^3 und je sec.

Als handliche Maßeinheit für den mikroskopischen Wirkungsquerschnitt wird in der Kernphysik das barn verwendet. Es ist

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Der makroskopische Wirkungsquerschnitt, der ja der Reziprokwert einer Länge ist, wird in cm^{-1} gemessen.
Die mikroskopischen Wirkungsquerschnitte sind für fast alle Atomarten sorgfältig gemessen und in Tabellen und graphischen Darstellungen veröffentlicht worden[1].
Im allgemeinen ist der mikroskopische Wirkungsquerschnitt von der Neutronengeschwindigkeit abhängig. Wir haben diese Abhängigkeit bereits bei der Spaltungsreaktion im $1/v$-Gesetz und bei den Resonanzeinfängen kennengelernt. Es sind demnach die Größen, die wir oben abgeleitet haben, meistens energie- d.h. geschwindigkeitsabhängig. Andererseits aber ist die Geschwindigkeit der Neutronen nicht einheitlich, auch für die thermischen Neutronen, denen ja unser Hauptinteresse gilt, existiert zwar die mittlere, von der Temperatur abhängige Geschwindigkeit $\bar{v}$, aber die Einzelgeschwindigkeiten sind recht unterschiedlich, etwa einer Maxwell-Verteilung entsprechend.
Berücksichtigt man die Energieverteilung der Neutronen, so tritt an die Stelle der Gl. (II, 10), in der nur die Geschwindigkeit gemittelt ist:

(II, 12) $$\Phi = \int_0^\infty n(E)\, v(E)\, dE\,.$$

Darin ist jetzt aber $n(E)$ die Neutronendichte je Energieeinheit. Das heißt es ist $n(E)dE$ die Anzahl der Neutronen, deren Energie zwischen E und $E + dE$ liegt, so daß $\int_0^\infty n(E)\, dE = n$ ist. Die obere Grenze des Integrals sollte, wenn man mit der

[1] Neutron Cross Sections Donald J. Hughes and John A. Harey, Juli 1955; Brookhaven National Laboratory Upton, New York.

Formel (II, 12) die thermischen Neutronen meint, natürlich auch bei der oberen Energieschwelle der thermischen Neutronen liegen. Tatsächlich aber ist der Beitrag der Neutronen oberhalb des thermischen Gebietes zum Integral so gering, daß man die Grenze ins Unendliche legen darf, ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen.

Haben wir eine Neutronenzahl je Energieeinheit definiert, so können wir entsprechend nach der Gl.(II, 10) auch einen Neutronenfluß je Energieeinheit festlegen

(II, 13) $$n(E)\,\bar{v}(E) = \varphi(E),$$

so daß $\Sigma(E)\,\varphi(E)\,dE$ die Anzahl der Reaktionen ist, die die Neutronen, deren Energien zwischen E und $E + dE$ liegen, je cm^3 und je sec machen:

(II, 14) $\Sigma(E)\,\varphi(E)\,dE$ = Anzahl der Neutronenreaktionen im Energiebereich E bis $E + dE$ je cm^3 und je sec.

Damit wird dann

(II, 15) $$\Phi = \int_0^\infty \varphi(E)\,dE.$$

Der mittlere makroskopische Wirkungsquerschnitt wird:

(II, 16) $$\bar{\Sigma} = \frac{\int_0^\infty \Sigma(E)\,\varphi(E)\,dE}{\int_0^\infty \varphi(E)\,dE}.$$

Die mittlere freie Weglänge:

(II, 17) $$\bar{\lambda} = \frac{\int_0^\infty \lambda(E)\,\varphi(E)\,dE}{\int_0^\infty \varphi(E)\,dE},$$

und der mittlere mikroskopische Wirkungsquerschnitt:

(II, 18) $$\bar{\sigma} = \frac{\int_0^\infty \sigma(E)\,\varphi(E)\,dE}{\int_0^\infty \varphi(E)\,dE},$$

Die stärkste Energieabhängigkeit zeigen die Absorptionsquerschnitte. Wir sahen ja in der Abb. I, 5 ein Beispiel dafür. Man kann die Neutronen nach der Art der Absorption, die sie in den verschiedenen Atomen erleiden, in drei Bereiche einteilen. Im unteren, das ist im wesentlichen der thermische Bereich, gilt, wie auch bei der Spaltung, das $1/v$-Gesetz: Der Absorptionsquerschnitt nimmt mit wachsender Energie stetig ab. Oberhalb des thermischen Bereiches liegt das Resonanzgebiet, der Bereich, in dem bei den meisten in der Reaktortechnik verwendeten Atomen die Resonanzspitzen liegen. Der Resonanzbereich liegt auch noch bei verhältnismäßig kleinen Energiewerten, verglichen mit der Energie der Spaltungsneutronen. Oberhalb des Resonanzbereiches im weitaus größten Energiebereich bis zur Energie der Spaltungsneutronen fällt der Absorptionsquerschnitt stetig ab.
Der Spaltungsquerschnitt spielt bei thermischen Reaktoren nur im thermischen Energiebereich eine wesentliche Rolle. Dort gehorcht er dem $1/v$-Gesetz.
Die Streuquerschnitte der Atome sind nahezu energieunabhängig und größenordnungsmäßig gleich den Flächendurchmessern der Atomkerne.

2. Die Diffusionsgleichung für thermische Neutronen

Bei der Diffusion der Neutronen muß man zwei Fälle unterscheiden: Die Diffusion der schnellen Neutronen während des Abbremsvorganges und die der thermischen Neutronen. Eine Theorie, die den Diffusionsvorgang in befriedigender Weise beschreibt, gibt es nur für den letzteren Fall. Das liegt daran, daß die thermischen Neutronen im Mittel eine einheitliche Geschwindigkeit haben, während die Neutronen im Abbremsbereich ihre Geschwindigkeit dauernd ändern. Die mathematische Beschreibung des Diffsionsvorganges ist aber nur einfach für den Fall, daß die Diffusionskonstante wirklich konstant ist und nicht von der Energie abhängt wie bei den Neutronen im Abbremsbereich. Eine Methode, auch die Diffusion der Neutronen im Abbremsbereich zu beschreiben, werden wir im Abschnitt II, 5 kennenlernen. Diese Theorie geht auf Fermi zurück und ist wegen ihrer Einfachheit die beste, die wir z. Zt. haben, wenngleich die dort vorgenommenen vereinfachenden Annahmen dem wirklichen

Verhalten der Neutronen nicht immer ganz entsprechen, so daß die Genauigkeit dieses Verfahrens für manche Fälle nicht ausreichend ist. Die Diffusionsgleichung der thermischen Neutronen, zusammen mit der Fermischen Abbremstheorie, nennt man die „Eingruppentheorie". Eingruppentheorie deshalb, weil man eigentlich nur das Diffusionsverhalten der Neutronen einer Energiegruppe, der thermischen Neutronen, behandelt. Die gesamten Neutronen im Abbremsbereich berücksichtigt man nur dadurch, daß man sie als Nachschubquelle für die thermischen Neutronen verwendet. In der Mehrgruppentheorie, die im Abschn. V behandelt wird, teilt man auch die Neutronen im Abbremsbereich in mehrere Energieabschnitte ein, innerhalb deren sie so behandelt werden, als ob sie eine einheitliche Geschwindigkeit hätten. Die einzelnen Gruppen sind dann untereinander durch Übergangsbedingungen gekoppelt, die dem Neutronentransport aus der jeweils schnelleren Gruppe in die nächst langsamere entsprechen.
Wir wollen in diesem Abschnitt die Eingruppentheorie besprechen und eine Gleichung aufstellen, die für die thermischen Neutronen die Bedingung des Gleichgewichtes zwischen den Quellneutronen — das sind die Neutronen, die je Sekunde aus dem Abbremsbereich in den thermischen Energiebereich fallen — den im Reaktor absorbierten und den durch die Wände ausfließenden thermischen Neutronen, herstellt.
Um die Diffusionsgleichung für die thermischen Neutronen abzuleiten, betrachten wir im Inneren des Reaktors ein sehr kleines Volumenelement der Kantenlängen dx, dy und dz (Abb. II, 2). Es soll der Einfachheit halber mit einem homogenen Reaktor gerechnet werden, in dem also die Moderatorsubstanz und das Uran völlig homogen gemischt ist, so daß in dem Volumenelement $dx\,dy\,dz$ sowohl Uran als auch Moderatormaterial in gleichmäßiger Verteilung enthalten ist, eine Annahme, die wir später wieder fallen lassen können.
Wir interessieren uns nun für die zeitliche Änderung der Neutronenanzahl in dem Volumenelement $dx\,dy\,dz$. Daß sich diese Anzahl ändert, hat drei verschiedene Gründe: Erstens werden innerhalb $dx\,dy\,dz$ sowohl durch den Moderator als auch durch den Brennstoff Neutronen absorbiert; zweitens aber entstehen bei jeder Uranspaltung neue Neutronen, die durch den

Abbremsvorgang im Moderator innerhalb $dx\,dy\,dz$ thermisch werden. Drittens fließen durch die Begrenzungswände des Volumenelementes $dx\,dy\,dz$ dauernd Neutronen aus bzw. ein. Wir wollen im folgenden diesen drei Vorgängen eine mathematische Formulierung geben.

Ist n die Anzahl der Neutronen im Kubikzentimeter, so ist $n \cdot dx\,dy\,dz$ die im Volumenelement $dx\,dy\,dz$. $\frac{\partial n}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$ ist dann die Anzahl, um die sich der Neutronenbestand in $dx\,dy\,dz$ je Sekunde ändert. Wir wollen diese zeitliche Änderung des Neutronenbestandes aufspalten in die drei eben geschilderten Anteile:

$$\frac{\partial n}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = \left[\frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial n_q}{\partial t} + \frac{\partial n_D}{\partial t}\right] dx\,dy\,dz\,. \tag{II, 19}$$

Darin bedeuten $\frac{\partial n_a}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$ die je sec innerhalb $dx\,dy\,dz$ durch Absorption verschwindenden Neutronen, $\frac{\partial n_q}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$ die je sec innerhalb $dx\,dy\,dz$ durch den Abbremsvorgang thermisch werdenden und $\frac{\partial n_D}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$ die durch Diffusion durch die Begrenzungswände von $dx\,dy\,dz$ hinaus- oder hineinfließenden Neutronen.

Den ersten Anteil $\frac{\partial n_a}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$ können wir sofort angeben: Es ist

$$\frac{\partial n_a}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = -\,dx\,dy\,dz\,\Sigma_a\,\Phi\,; \tag{II, 20}$$

denn nach dem im Abschnitt II, 1 über die Wirkungsquerschnitte Gesagten ist $\Sigma_a \Phi$ die Anzahl der je cm^3 und sec absorbierten Neutronen, so daß $\Sigma_a \Phi\,dx\,dy\,dz$ die Anzahl der im Volumenelement $dx\,dy\,dz$ je sec absorbierten Neutronen ist. Das negative Vorzeichen besagt, daß sich die Neutronenzahl durch die Absorption mit der Zeit vermindert.

Den zweiten Anteil, den Quellterm, können wir hier nur formal angeben. Er wird im nächsten Abschnitt erklärt. Die Nachschubneutronen für den thermischen Bereich sind ja diejenigen, die aus dem Energiebereich, in dem die Abbremsung geschieht, durch Stöße an Moderatorkernen in den thermischen Bereich fallen. Nennen wir q_{th} die Anzahl der Neutronen, die je cm^3 und je sec

thermisch werden, so ist $q_{th} \cdot dxdydz$ die Anzahl der im Volumenelement $dxdydz$ je sec thermisch werdenden Neutronen:

(II, 21) $$\frac{\partial n_a}{\partial t}\, dx\, dy\, dz = q_{th}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Um den dritten Anteil, den Neutronenaus- bzw. -einfluß zu berechnen, müssen wir zuvor noch eine dritte Art der Neutronenflußdichte besprechen, die wir $\mathfrak{j}$ nennen wollen. $\mathfrak{j}$ ist die Diffusionsstromdichte. Sie hat im Gegensatz zum Neutronenfluß Φ eine

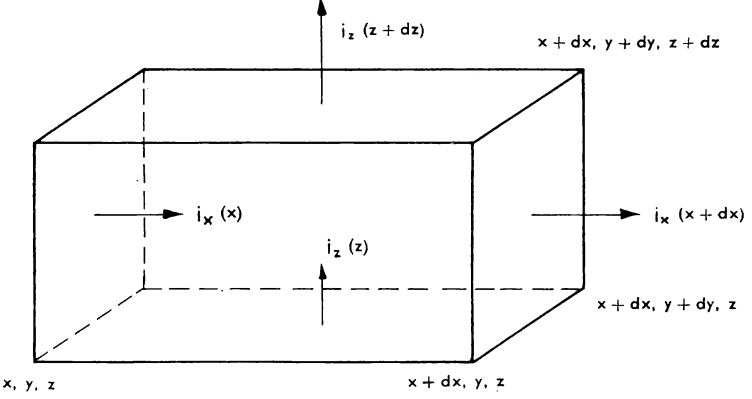
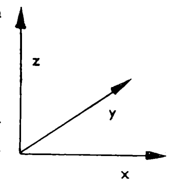


Abb. II, 2. Zur Ableitung der Neutronendiffusionsgleichung in kartesischen Koordinaten



Vorzugsrichtung und ist auch physikalisch etwas ganz anderes als der Neutronenfluß. Gemeinsam ist beiden lediglich die Dimension Neutronen je cm² und sec.

Wir denken uns die Neutronendichte in dem hier stets betrachteten Volumenelement $dxdydz$ gegenüber seiner Umgebung etwas erhöht, etwa dadurch, daß wir innerhalb $dxdydz$ eine Neutronenquelle angebracht haben. Da die Diffusion der Neutronen im Reaktor ein Vorgang ist, der nach den Gesetzen der Statistik abläuft, werden die Neutronen bestrebt sein, die induzierte Störung der Dichtegleichverteilung auszugleichen. Es werden also mehr Neutronen durch die Wände des Volumenelementes $dxdydz$ aus- als einfließen. Als Maß für die Stärke des Ausgleichsbestrebens wird die Diffusionsstromdichte $\mathfrak{j}$ eingeführt: $\mathfrak{j}$ ist die Anzahl

der Neutronen, die je sec im Mittel eine Fläche von 1 cm² effektiv durchlaufen. Dabei ist die Fläche von 1 cm² senkrecht zu denken auf der Diffusionsstromrichtung. Effektiv durchlaufen heißt, mehr in der einen Richtung der Flächennormalen (der positiven Normalen) als in der anderen. Die Diffusionsstromdichte ist ein Vektor, sie hat eine Richtung. Zwar laufen die Neutronen zwischen den Moderator- und Brennstoffkernen regellos hin und her, sie bewegen sich jedoch im allgemeinen im Mittel in einer Vorzugsrichtung, die in diesem Falle der Neutronenquelle von der Quelle fortweist.

Wir betrachten nun die Abb. II, 2, in der das Volumenelement $dx\,dy\,dz$ gezeichnet ist, und schreiben die Anzahl der Neutronen auf, die durch die sechs Wände des Quaders $dx\,dy\,dz$ je sec ausfließen. Zunächst für die beiden gegenüberliegenden Flächen, deren Normalen in der x-Richtung liegen:

Es sei j_x die in der x-Richtung liegende Komponente der mittleren Neutronendiffusionsstromdichte $\mathfrak{j}$ an der Stelle x. Dann ist die Anzahl der durch die linke Oberfläche an der Stelle x in den Quader je sec einströmenden Neutronen $j_x(x)\,dy\,dz$. An der rechten Seite, bei $(x+dx)$, fließen aber $j_x(x+dx)\,dy\,dz$ Neutronen aus. Für die beiden anderen Flächenpaare gilt das entsprechende. Durch Summierung aller durch die Oberflächen des Quaders ein- bzw. austretenden Neutronen erhält man die Anzahl der Neutronen, um die sich der Bestand innerhalb des Quaders $dx\,dy\,dz$ je sec ändert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_D}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = &-[j_x(x+dx)-j_x(x)]\,dy\,dz \\ &-[j_y(y+dy)-j_y(y)]\,dx\,dz \\ &-[j_z(z+dz)-j_z(z)]\,dx\,dy \end{aligned} \qquad \text{(II, 22)}$$

oder indem wir durch $dx\,dy\,dz$ dividieren, den Grenzwert des obigen Ausdruckes bilden und wieder mit $dx\,dy\,dz$ multiplizieren:

$$\frac{\partial n_D}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = -\left[\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz\,. \qquad \text{(II, 23)}$$

In dieser Gleichung können wir noch die Diffusionsstromdichte j durch den Neutronenfluß Φ kennzeichnen. Der Zusammenhang

zwischen diesen beiden Größen ist

$$\text{(II, 24)} \qquad D\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -j_x; \quad D\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -j_y; \quad D\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -j_z.$$

D ist die Diffusionskonstante. Die Gl. (II, 24) besagt, daß die Neutronenflußdichte j dem Gefälle der Neutronendichte proportional ist. Um den Rechnungsgang jetzt nicht zu unterbrechen, leiten wir die Gl. (II, 24) etwas später im Abschnitt II, 6 ab.

Setzt man die Gl. (II, 24) in die Gl. (II, 23) ein und addiert die drei Anteile der Gln. (II, 20, 21, 24), so erhält man:

$$\frac{\partial n}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = \left(\frac{\partial n_D}{\partial t} + \frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial n_q}{\partial t}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= \left[D\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) - \Sigma_a \Phi + q_{th}\right] dx\,dy\,dz$$

oder, indem man durch das Volumenelement $dx\,dy\,dz$ dividiert und formal

$$\text{(II, 25)} \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta\,\Phi$$ [1]

$$\text{mit} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

setzt:

$$\text{(II, 26)} \qquad D\Delta\Phi - \Sigma_a \Phi + q_{th} = \frac{\partial n}{\partial t}.$$

Die Gl. (II, 26) ist die allgemeine Form der Diffusionsgleichung für die thermischen Neutronen. Der darin verwendete Δ-Operator kann jedoch je nach der äußeren Gestalt des Reaktors verschiedene Formen haben. Die Darstellung in der Gl. (II, 25) erweist sich als zweckmäßig für einen quaderförmigen Reaktor. Das ist aber aus verschiedenen Gründen eine sehr ungünstige Form. Viel öfter rechnet man, besonders zum Zwecke von Abschätzungen, mit einem kugelförmigen und noch häufiger mit einem zylindrischen Reaktor. Wir wollen daher den Δ-Operator auch noch für den kugelsymmetrischen Fall berechnen: Kugelsymmetrisch heißt hier, daß im kugelförmigen Reaktor der Neutronendiffusionsstrom $\mathfrak{j}$ nur in der Radialrichtung fließt.

---

[1] Der Differentialoperator Δ ist hier lediglich ein abkürzendes Symbol, und nicht zu verwechseln mit dem in der Differenzen- und Differentialrechnung verwendeten Δ.

Als Volumenelement wählen wir jetzt den Bereich zwischen zwei konzentrischen Kugeloberflächen mit den Radien r und $r+dr$ (Abb. II, 3). Das Volumen ist, wenn dr sehr klein wird, $4\pi r^2 \cdot dr$. Die Gln. (II, 20 und 21) lauten also in diesem Falle:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} 4\pi r^2\, dr = -4\pi r^2\, dr\, \Sigma_a \Phi \tag{II, 27}$$

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} 4\pi r^2\, dr = 4\pi r^2\, dr\, q_{th}. \tag{II, 28}$$

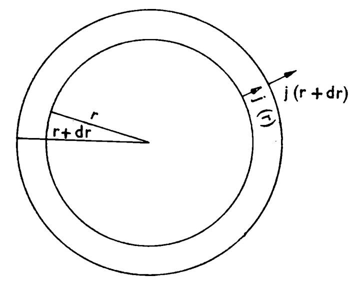


Abb. II, 3. Zur Diffusionsgleichung in sphärischen Koordinaten

Durch die innere der beiden Kugeloberflächen fließen $j(r) \cdot 4\pi r^2$ Neutronen in das Volumenelement ein und durch die äußere Oberfläche $j(r+dr) \cdot 4\pi\ (r+dr)^2$ Neutronen aus. Die durch Ein- bzw. Ausfluß bewirkte Änderung des Neutronenbestandes im Volumenelement $4\pi r^2 dr$ ist also

$$4\pi r^2\, dr \frac{\partial n_D}{\partial t} = -\left[j\,(r+dr)\cdot 4\pi\,(r+dr)^2 - j\,(r)\cdot 4\pi\, r^2\right]$$

oder

$$4\pi r^2\, dr \frac{\partial n_D}{\partial t} = -\,4\pi r^2\, dr \frac{j\,(r+dr)\cdot(r+dr)^2 - j\,(r)\, r^2}{r^2\, dr}.$$

Durch Grenzübergang erhält man daraus:

$$4\pi r^2 dr \frac{\partial n_D}{\partial t} = -\,4\pi r^2\, dr \cdot \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 j}{\partial r}.$$

Entsprechend dem vorherigen Fall ist wieder $j = -D\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ und es wird

$$4\pi r^2 dr \frac{\partial n_D}{\partial t} = -\,4\pi r^2 dr \cdot D \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)}{\partial r} \tag{II, 29}$$

$$= -\,4\pi r^2\, dr\, D\left(\frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}\right).$$

Durch Addieren der Gln. (II, 27, 28, 29) und Dividieren durch $4\pi r^2 dr$ gewinnt man die Diffusionsgleichung für den kugelsymmetrischen Fall:

$$D\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) - \Sigma_a \Phi + q_{th} = \frac{\partial n}{\partial t}.$$

Der Δ-Operator lautet also hier:

(II, 30) $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Die Ableitung des Δ-Operators für den zylindersymmetrischen Fall wollen wir übergehen. Sie läuft ganz analog den beiden vorhergehenden, nur muß man jetzt als Volumenelement einen schmalen zylindrischen Ring nehmen. Das Ergebnis ist:

(II, 31) $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

worin z die Koordinate in der Achsenrichtung des Zylinders ist und r senkrecht darauf steht.

Wir wollen uns noch ein wenig mit dieser Gleichung befassen. Dabei nehmen wir an, daß der Reaktor stationär laufe, d.h. daß sich sein Verhalten mit der Zeit nicht ändert. Das entspricht dem Normalbetrieb. In diesem Falle ist $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ d.h. die Neutronendichte ist im ganzen Reaktor zeitlich konstant. Es ist dann

(II, 32) $$D\Delta\Phi - \Sigma_a \Phi + q_{th} = 0.$$

Diese Gleichung integrieren wir über das ganze Reaktorvolumen V bestehend aus der Brennstoff- und der Moderatorfüllung:

(II, 33) $$D\int_V \Delta\Phi\, dV - \Sigma_a \int_V \Phi\, dV + \int_V q_{th}\, dV = 0$$

Das erste Glied wollen wir noch etwas umformen und betrachten dazu wieder den quaderförmigen Reaktor, für den $-D \cdot \Delta\Phi = -D\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right] = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$ war. Der erste

Summand der Gl. (II, 33) ist danach, wenn $x_1 y_1 z_1$ die Kantenlängen des Reaktors sind:

$$D \int_V \Delta \Phi \, dV = \int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\int_0^{z_1} \frac{\partial j_x}{\partial x} \, dx\, dy\, dz + \int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\int_0^{z_1} \frac{\partial j_y}{\partial y} \, dx\, dy\, dz$$

$$+ \int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\int_0^{z_1} \frac{\partial j_z}{\partial z} \, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^{y_1}\int_0^{z_1} [j_x(x_1) - j_x(o)] \, dy\, dz$$

$$+ \int_0^{x_1}\int_0^{z_1} [j_y(y_1) - j_y(o)] \, dx\, dz$$

$$+ \int_0^{x_1}\int_0^{y_1} [j_z(z_1) - j_z(o)] \, dx\, dy$$

Da aber j die Diffusionsstromdichte der Neutronen ist, ist $\int_0^{y_1}\int_0^{z_1} [j_x(x_1) - j_x(o)] \, dy\, dz$ die Anzahl der Neutronen, die durch die beiden gegenüberliegenden Begrenzungswände des Reaktors, deren Flächennormalen in der x-Richtung liegen, je sec ausfließen. Das Entsprechende gilt für die übrigen Begrenzungsflächenpaare des Reaktors, so daß das Integral $D \int_V \Delta \Phi dV$ die Anzahl der Neutronen ist, die je sec durch die Reaktorwände ausfließen. Diese Tatsache gilt ganz allgemein, unabhängig von der Form des Reaktors.

In der Gl. (II, 33) bedeutet also der erste Summand die Anzahl der je sec durch die Reaktorwände nach außen fließenden Neutronen, der zweite Summand die im ganzen Reaktorinneren je sec absorbierten, und der dritte die Anzahl der je sec thermisch werdenden Neutronen. Die Gl.(II, 33) bzw. (II, 32) ist die Bedingung dafür, daß der Reaktor stationär läuft; denn sie besagt, daß die Anzahl der neu entstehenden thermischen Neutronen genau gleich ist der Anzahl der im Inneren des Reaktors absorbierten plus der der aus dem Reaktor fortfließenden Neutronen.

Da der erste Summand in der Gl. (II, 33) mit der Oberfläche wächst, die beiden anderen aber mit dem Volumen des Reaktors, sieht man wieder, daß man beim Bau eines Reaktors darauf achten muß, daß das Verhältnis von Oberfläche zum Volumen möglichst klein ist. Die Idealgestalt eines Reaktors in dieser Hinsicht ist die Kugel. Die Kugel hat jedoch mancherlei andere Schwierigkeiten, besonders herstellungstechnischer Art. Stets aber ist man bestrebt, die Kugelform möglichst gut anzunähern. Eine sehr häufig anzutreffende Reaktorform ist ein Zylinder, dessen Höhe etwa so groß ist wie der Durchmesser, ein sogenannter Kubischer Zylinder.

Das jetzt Gesagte betrifft die Gestalt des Reaktors. Aber auch bezüglich seiner Größe gilt die Forderung, daß das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen möglichst klein sein soll. Das bedeutet, da die Oberfläche etwa mit der zweiten, das Volumen aber mit der dritten Potenz des Durchmessers wächst, daß, je größer der Reaktor ist, desto weniger Neutronen ausfließen im Verhältnis zu den im Inneren des Reaktors erzeugten. Die Größe eines Reaktors ist aber natürlich begrenzt durch Forderungen der Wirtschaftlichkeit.

Die Deutung der einzelnen Summanden in der Gl. (II, 33) gilt entsprechend auch für die Gl. (II, 32), in der sich jeder Summand auf einen an irgendeiner Stelle im Innern des Reaktors befindlichen Volumenteil von 1 cm^3 bezieht. Der erste Summand gibt die Anzahl der aus diesem Kubikzentimeter ausfließenden, der zweite die Anzahl der im Kubikzentimer absorbierten, und der dritte die der im Kubikzentimer thermisch werdenden Neutronen an.

Über den Quellterm q_{th} wird im Abschnitt II, 5 näheres gesagt werden. Es sei hier jedoch vorweggenommen, daß er den Neutronenfluß Φ als Faktor enthält. Das ist deshalb wichtig, weil dadurch die Gl. (II, 32) homogen, und somit leicht zu handhaben wird. Man zieht den den beiden letzten Summanden der Gl. (II, 32) gemeinsamen Faktor Φ heraus, dividiert durch die Diffusionskonstante D und schreibt die Gleichung in der Form

(II, 34) $$\Delta\Phi + B^2\Phi = 0,$$

worin B, der sogenannte Krümmungsfaktor, eine Konstante ist, deren Größe von den Bedingungen am Rande des Reaktorcores,

d.h. im allgemeinen der Größe des Cores abhängt. Die Größe B ist somit eine Art Geometriefaktor für das Reaktorcore.
Im Anfang hatten wir vorausgesetzt, daß das Material, aus dem der Reaktor aufgebaut ist, homogen gemischt ist aus Brennstoff und Moderator. Diese Voraussetzung braucht jedoch nicht streng erfüllt zu sein. Bei einem heterogenen Reaktor, in dem der Brennstoff getrennt ist vom Moderator wie bei dem im ersten Paragraphen beschriebenen Druckwasserreaktor, gilt unsere Diffusionstheorie der thermischen Neutronen in guter Näherung auch dann, wenn der Abstand der Brennstoffbereiche, der sogenannte Zellenabstand klein ist im Verhältnis zu den Dimensionen des Cores.
Der heterogene Reaktor wird noch bei späterer Gelegenheit besprochen werden.
Die hier beschriebene Diffusionstheorie betrifft natürlich nur den Teil des Reaktors, der den Moderator und den Brennstoff enthält, das Reaktorcore. Die Neutronen, die sich außerhalb des Cores aufhalten, behandelt man zwar auch mit der Diffusionstheorie, aber mit anderen Konstanten. Ein Beispiel werden wir bei der Berechnung des Reflektors kennenlernen.

3. Die Abbremsung eines Neutrons als Einzelvorgang

In der Diffusionstheorie der thermischen Neutronen ist nun noch die Frage nach dem Quellterm q_{th} offen. Diese Größe betrifft den Energiebereich oberhalb des thermischen. Das ist von etwa 0,1 eV bis zu etwa 2 MeV, der Bereich also, innerhalb dessen die Spaltungsneutronen, die im Mittel mit 1 bis 2 MeV erscheinen, durch Zusammenstöße mit Moderatorkernen abgebremst werden, bis sie, mit etwa 0,01 bis 0,1 eV als thermische Neutronen für die Uranspaltung verwendbar sind. Um die Quellstärke q_{th} der thermischen Neutronen abzuleiten, müssen wir zunächst die Vorgänge bei einzelnen Zusammenstößen zwischen Neutronen und streuenden Atomkernen beschreiben.
Wir betrachten die Energieübertragung eines einzelnen Neutrons an einen Moderatorkern und nehmen dabei an, daß der Kern vor dem Zusammenstoß mit dem Neutron sich in Ruhe befindet. Das Neutron bewege sich mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{n0}$ auf den Kern zu. Im Augenblick des Zusammenstoßes überträgt es einen Teil

seines Impulses auf den Kern und fliegt nach dem Stoß in einer im allgemeinen anderen Richtung mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{n1}$ weiter. Der Kern selber ist durch den Stoß in Bewegung gesetzt worden und fliegt mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{k1}$ fort. Die Geschwindigkeiten sind hier der Übersichtlichkeit der Rechnungen halber in Form von Vektoren geschrieben. Der eben geschilderte Vorgang des Stoßes ist noch einmal in der Abb. II, 4 skizziert. Unser Ziel ist jetzt, das Verhältnis des Geschwindigkeitsbetrages des Neutrons vor dem Stoß zu dem nach dem Stoß auszurechnen. Wir benötigen dazu den Satz von der Erhaltung des Impulses und den von der Erhaltung der Energie. Der erstere besagt, daß der Gesamtimpuls vor gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoß ist. Setzen wir die Massen der Stoßpartner gleich ihren Massenzahlen, so daß das Neutron die Massenzahl 1 erhält und der Moderatorkern die Massenzahl A, so lautet der Impulssatz:

(II, 35) $$\mathfrak{v}_{n0} = \mathfrak{v}_{n1} + A\mathfrak{v}_{k1}.$$

Links in der Gl. (II, 35) steht der Impuls vor, rechts der nach dem Stoß. Eine Größe $\mathfrak{v}_{k0}$ tritt nicht auf, weil der Kern vor dem Stoß als ruhend angenommen wurde.

Der Energiesatz besagt für den Fall des elastischen Stoßes, daß auch die kinetische Energie vor dem Stoß gleich der nach dem Stoß sein muß. Die Bedingung lautet:

(II, 36) $$\frac{1}{2}\mathfrak{v}_{n0}^2 = \frac{1}{2}\mathfrak{v}_{n1}^2 + \frac{A}{2}\mathfrak{v}_{k1}^2.$$

Bringen wir in der Gl. (II, 35) das $\mathfrak{v}_{k1}$ auf eine Seite, quadrieren die Gleichung und setzen den Wert $\mathfrak{v}_{k1}$ in die Gl. (II, 36) ein, so erhalten wir:

(II, 37) $$(A-1)\,\mathfrak{v}_{n0}^2 - (A+1)\,\mathfrak{v}_{n1}^2 + 2\,(\mathfrak{v}_{n0}, \mathfrak{v}_{n1}) = 0.$$

Darin ist $(\mathfrak{v}_{n0}, \mathfrak{v}_{n1}) = v_{n0} \cdot v_{n1} \cos\psi$ das innere Produkt der beiden Vektoren $\mathfrak{v}_{n0}$ und $\mathfrak{v}_{n1}$. v_{n0} und v_{n1} sind ihre Beträge und ψ ist der von ihnen eingeschlossene Winkel. Schreiben wir also die Gl. (II, 37) in skalare Größen um, so wird

$$(A-1)\,v_{n0}^2 - (A+1)\,v_{n1}^2 + 2\,v_{n0}\,v_{n1}\cos\psi = 0$$

oder

$$(\text{II}, 38) \quad (A-1)-(A+1)\left(\frac{v_{n1}}{v_{n0}}\right)^2+2\frac{v_{n1}}{v_{n0}}\cos\psi=0\,.$$

Damit ist eigentlich unser Ziel, das Verhältnis der Neutronengeschwindigkeit vor und nach dem Stoß auszurechnen, schon erreicht; denn die Gl. (II, 38) ist eine quadratische Gleichung, aus der wir das Verhältnis v_{n0}/v_{n1} ausrechnen können. Das Verhältnis hängt außer von der Massenzahl A des Moderatorkerns noch von dem Streuwinkel ψ ab, d.h. dem Winkel, um den das Neutron beim Zusammenstoß mit dem Kern von seiner ursprünglichen Bahn abgelenkt wird.

Aus Gründen, die wir später erläutern wollen, müssen wir nun die Gl. (II, 38) noch in eine etwas andere Form bringen. Wir brauchen nämlich das Geschwindigkeitsverhältnis v_{n0}/v_{n1} nicht nur in Abhängigkeit vom Streuwinkel ψ im ruhenden Koordinatensystem, sondern auch in Abhängigkeit vom Streuwinkel ϑ in einem bewegten, dem sogenannten Schwerpunktsystem.

Bei der Ableitung der Gl. II, 36 war angenommen worden, daß sich der Moderatorkern, bevor er von dem Neutron angestoßen wird, in Ruhe befindet, also die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{k0} = 0$ hat. Alle angegebenen Geschwindigkeiten wurden in einem Koordinatensystem gemessen, das mit dem Moderatorkern ruht. Für ein solches ruhend gedachtes Koordinatensystem hat sich der Name „Laborsystem" eingebürgert. Die Größen v_{n0}, v_{n1}, ψ in der Gl. (II, 38) beziehen sich also auf das Laborsystem.

Grundsätzlich ist aber auch jedes andere, auch ein bewegtes Koordinatensystem für die Beschreibung der Vorgänge bei der Impulsübertragung geeignet. Das Schwerpunktsystem erweist sich für viele Fälle als besonders zweckmäßig. Es ist ein Koordinatensystem, das sich mit der Geschwindigkeit des Schwerpunktes der betrachteten Stoßpartner im Laborsystem bewegt. Wollen wir bestimmte Größen, etwa die Geschwindigkeiten vom Laborsystem in das Schwerpunktsystem übertragen, so müssen wir eine entsprechende Koordinatentransformation durchführen. Die Transformationsvorschrift ist in diesem Falle einfach: Wir gewinnen, da sich das Schwerpunktsystem im Laborsystem mit einer Schwerpunktgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_s$ bewegt, die Geschwindigkeit im Schwerpunktsystem dadurch, daß wir von den entsprechenden

Geschwindigkeiten im Laborsystem jeweils den Vektor $\mathfrak{v}_s$ abziehen.

Es wird also:

(II, 39) $\mathfrak{v}'_{n0} = \mathfrak{v}_{n0} - \mathfrak{v}_s$; $\mathfrak{v}'_{n1} = \mathfrak{v}_{n1} - \mathfrak{v}_s$; $\mathfrak{v}'_{k0} = -\mathfrak{v}_s$; $\mathfrak{v}'_{k1} = \mathfrak{v}_{k1} - \mathfrak{v}_s$.

Die gestrichenen Werte bezeichnen jetzt die im Schwerpunktsystem gemessenen Größen. Hinzu kommt noch die Definition der Schwerpunktgeschwindigkeit, in unserem Falle:

(II, 40) $$\mathfrak{v}_s = \frac{1}{A+1}\mathfrak{v}_{n0}\,.$$

Mit den Gl. (II, 39) und (II, 40) können wir die für das Laborsystem abgeleiteten Größen in das Schwerpunktsystem übertragen. Aus der zweiten und dritten der Gl. (II, 39) folgt:

$$\mathfrak{v}'_{n1} = \mathfrak{v}_{n1} - \frac{1}{A+1}\mathfrak{v}_{n0}\,.$$

Durch Quadrieren ergibt sich daraus:

(II, 41) $$\mathfrak{v}'^2_{n1} = \mathfrak{v}^2_{n1} - \frac{2}{A+1}(\mathfrak{v}_{n1}, \mathfrak{v}_{n0}) + \frac{1}{(A+1)^2}\mathfrak{v}^2_{n0}\,.$$

Durch Elimination des inneren Produktes $(\mathfrak{v}_{n1}, \mathfrak{v}_{n0})$ aus den Gln. (II, 37) und (II, 41) erhalten wir das Zwischenergebnis:

$$\mathfrak{v}'^2_{n1} = \left(\frac{A}{A+1}\right)^2 \mathfrak{v}^2_{n0}$$

oder für die Beträge der Vektoren:

(II, 42) $$v'_{n1} = \frac{A}{A+1} v_{n0}\,.$$

Nun muß noch das Verhältnis v_{n0}/v_{n1} in die Schwerpunktkoordinaten umgeschrieben werden, und zwar soll dieses Verhältnis nicht, wie in der Gl. (II, 38,) von dem im Laborsystem gemessenen Streuwinkel ψ abhängig dargestellt werden, sondern in Abhängigkeit des entsprechenden Streuwinkels ϑ im Schwerpunktsystem. Der Winkel ϑ wird von den Vektoren $\mathfrak{v}'_{n0}$ und $\mathfrak{v}'_{n1}$ eingeschlossen. Die Abb. II, 4 zeigt die Lage der Vektoren, sowohl des Labor- wie auch des Schwerpunktsystems, links vor, rechts nach dem Stoß. Der Unterschied der beiden Streuwinkel im Labor- und im Schwerpunktsystem ist daraus erkenntlich.

Wollen wir nun eine der Gl. (II, 38) entsprechende Gleichung ableiten, in der anstelle des Streuwinkels ψ der Winkel ϑ auftritt, so müssen wir in der Gl. (II, 37) die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{n1}$ nach der

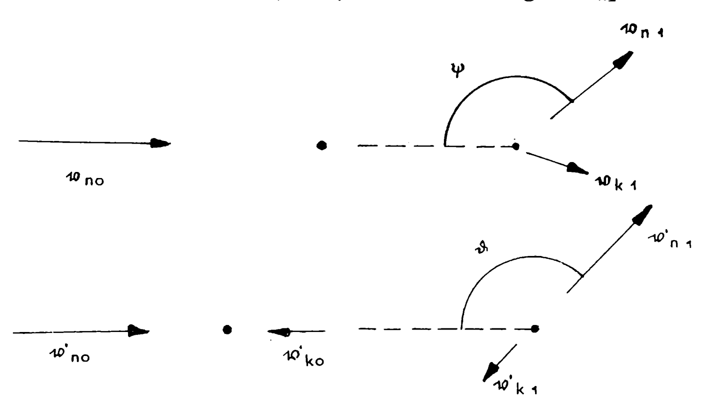


Abb. II, 4. Die Geschwindigkeitsvektoren für Moderatorkern und Neutron, links vor dem Stoß, rechts nach dem Stoß, oben im Laborsystem, jeweils darunter im Schwerpunktsystem. Der Punkt zwischen den Vektoren kennzeichnet den Ort des Zusammenstoßes

Gl. (II, 39) in Schwerpunktkoordinaten transformieren; denn dann erscheint das Produkt $(\mathfrak{v}_{n0}, \mathfrak{v}'_{n1})$ das den Faktor $\cos\vartheta$ enthält:

$$(A-1)\,\mathfrak{v}_{n0}^2 - (A+1)\,\mathfrak{v}_{n1}^2 + 2\,\mathfrak{v}_{n0}\,(\mathfrak{v}'_{n1} + \mathfrak{v}_s) = 0.$$

Daraus wird mit $(\mathfrak{v}_{n0}, \mathfrak{v}'_{n1}) = v_{n0} \cdot v'_{n1} \cos\vartheta$, nach der Gl. (II, 40) und der Gl. (II, 42)

$$(A-1)\,v_{n0}^2 - (A+1)\,v_{n1}^2 + 2\,\frac{A}{A+1}\,v_{n0}^2 \cos\vartheta + 2\,\frac{1}{A+1}\,v_{n0}^2 = 0$$

oder

$$\text{(II, 43)} \qquad \left(\frac{v_{n1}}{v_{n0}}\right)^2 = \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\vartheta}{(A+1)^2}\,.$$

Damit ist auch die Darstellung des Quotienten v_{n1}/v_{n0} in Abhängigkeit vom Streuwinkel ϑ im Schwerpunkstystem gelungen. Durch Elimination von v_{n1}/v_{n0} aus den Gln. (II, 38) und (II, 43) erhält man die Beziehung zwischen den Streuwinkeln ψ und ϑ:

$$\text{(II, 44)} \qquad \cos\psi = \frac{1 + A\cos\vartheta}{\sqrt{A^2 + 1 + 2A\cos\vartheta}}\,.$$

Der etwas umständliche Umweg über die Beschreibung der Stoßgesetze im Schwerpunktsystem war deshalb notwendig, weil ein

einfacher Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel und der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron beim Zusammenstoß mit einem Moderatorkern in einen bestimmten Winkelbereich gestreut wird, nur für den Streuwinkel im Schwerpunktsystem besteht.

Nun interessieren wir uns ja nicht so sehr für die Vorgänge beim Zusammenstoß *eines* Neutrons mit *einem* Moderatorkern, sondern vielmehr für das mittlere Verhalten vieler Neutronen, die an vielen Kernen gestreut werden. Dies Problem ist aber gleichbedeutend mit der Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein Neutron, das an einem Atomkern gestreut wird, in einen bestimmten Raumwinkelbereich $d\Omega$ abgelenkt wird. Die Antwort lautet, daß diese Wahrscheinlichkeit für jedes Raumwinkelelement die gleiche ist, wenn man den Raumwinkel im Schwerpunktsystem mißt.

Wir wollen auch dieses Gesetz an Hand unseres Modelles erklären. Aus der ersten der Gl. (II, 39) und der Gl. (II, 40) folgt

$$\mathfrak{v}'_{n0} = \frac{A}{A+1}\mathfrak{v}_{n0}$$

oder für die Beträge

(II, 45)
$$v'_{n0} = \frac{A}{A+1}v_{n0}.$$

Vergleicht man diese Gl. (II, 45) mit der Gl. (II, 42), so folgt

$$v'_{n0} = v'_{n1}.$$

Ebenso erhält man

$$v'_{k0} = v'_{k1}.$$

Im Schwerpunktsystem, in dem also der Schwerpunkt ruht, ändern sich durch den Zusammenstoß die Beträge der Geschwindigkeiten von Neutron und Moderatorkern nicht, sondern nur deren Richtungen. In der Abb. II, 5 sind die verschiedenen Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem dargestellt. Im Berührungspunkt der Neutronen mit der Kernbahn liegt ruhend der Schwerpunkt. Man kann den Stoßvorgang so auffassen, als ob sowohl das Neutron, wie auch der Kern an einer in der Abb. II, 5a gestrichelt gezeichneten starren Wand reflektiert würde. In Wirklichkeit findet diese Reflektion an der Oberfläche der als Kugeln gedachten Stoßpartner statt, wie es die Skizze, Abb. II, 5b, zeigt. Hier wurde die starre Reflexionsebene durch den Berührungspunkt von Kern und Neutron gelegt.

Wir betrachten nun einen Neutronenstrahl, der aus der Richtung $\mathfrak{v}'_{n0}$ kommend an dem Kern gestreut wird. Die Flächendichte des Strahles

soll konstant sein. Ist n die Anzahl der Neutronen im Kubikzentimeter, so wird der Kern, dessen Radius R sei, von einer Anzahl $N = nv'_{n0}\pi R^2$ Neutronen je sec. getroffen. Auf einen Ringbereich der Kernoberfläche von der Breite $R d\alpha$ (siehe Abb. II, 5) prallen dann je sec. $dN = nv'_{n0}\, R\, d\alpha \cos\alpha \cdot 2\pi R \sin\alpha$ Neutronen auf, die alle in einen Streuwinkelbereich $d\vartheta = 2 d\alpha$ fallen. Mit $\alpha = \frac{1}{2}\,\vartheta$ ist dann

$$dN = 2\pi\, R^2\, n\, v'_{n0} \cos\frac{\vartheta}{2} \sin\frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{2}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\, n\, v'_{n0}\, R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta .$$

Dividiert man noch durch die Gesamtzahl der auf den Kern fallenden Neutronen $N = \pi R^2 n v'_{n0}$, so erhält man die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein auf den Kern treffendes Neutron in den Winkelbereich $d\vartheta$ gestreut wird:

$$\frac{dN}{N} = dW = \frac{1}{2} \sin\vartheta\, d\vartheta . \tag{II, 46}$$

Andererseits ist das Raumwinkelelement nach der Abb. II, 5

$$d\Omega = 2\,\pi \sin\vartheta\, d\vartheta .$$

Es ist demnach die Wahrscheinlichkeit dW:

$$dW = \frac{dN}{N} = \frac{1}{4\pi}\, d\Omega .$$

Die auf einen kugelförmigen Kern treffenden Neutronen werden also, im Schwerpunktsystem betrachtet, nach allen Raumrichtungen hin gleichmäßig gestreut. Tatsächlich bestätigen Streuexperimente diesen Sachverhalt in einem Neutronenenergiebereich bis zu einigen MeV. Unser Modell des kugelförmigen Atomkerns ist also für die Beschreibung der Neutronenstreuung gut brauchbar.

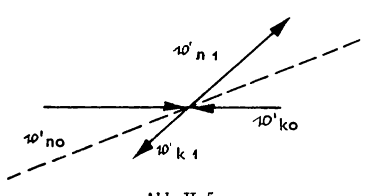


Abb. II, 5 a

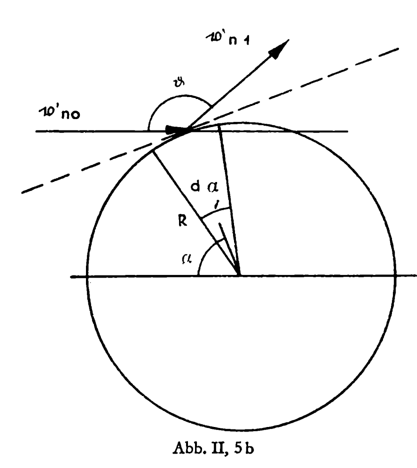


Abb. II, 5 b

Abb. II, 5 a u. 5 b. Die Streuung eines Neutrons an der Oberfläche eines kugelförmig gedachten Moderatorkerns. (Das Neutron wird als punktförmig angenommen)

Der letzte Schritt, der nun noch zur Berechnung des mittleren Energieverlustes je Neutronenstoß zu tun ist, ist der, daß man die Energieübertragung, wie wir sie in der Gl. (II, 43) ausgerechnet haben, über alle möglichen Raumrichtungen mittelt.
Es ist dazu zweckmäßig, für die Energie eine logarithmische Skala einzuführen. Eine Größe in einer logarithmischen Skala zu messen ist ja immer dann nützlich, wenn sich diese Größe so verhält, daß ihre relative, d. h. prozentuale Änderung unabhängig von der Größe selber ist, denn man erhält dadurch eine lineare Skala für den Logarithmus der Größe. Diese Voraussetzung ist in der Gl. (II, 43) gegeben: es ist, wenn wir v_{n1}^2/v_{n0}^2 gleich dem Verhältnis der entsprechenden Energien E_1/E_0 und den Energieverlust des Neutrons bei dem Stoß $\varDelta E = E_0 - E_1$ setzen,

$$\frac{v_{n1}^2}{v_{n0}^2} = \frac{E_1}{E_0} = \frac{E_0 - \varDelta E}{E_0} = \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\vartheta}{(A+1)^2}$$

oder

$$\frac{\varDelta E}{E_0} = 1 - \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\vartheta}{(A+1)^2}\,.$$

Wir setzen nun als Maß für die Energie eine Größe $u = \ln\frac{E_1}{E_0}$ ein und erhalten

$$\text{(II, 47)} \qquad u = \ln\frac{E_1}{E_0} = \ln\frac{A^2 + 1 + 2A\cos\vartheta}{(A+1)^2}\,.$$

Diesen logarithmischen Energieverlust mitteln wir für alle N Neutronen, die an einem Moderatorkern gestreut werden. Die Vorschrift lautet, wenn wir den Mittelwert von u für einen Stoß mit $-\xi$ bezeichnen:

$$\xi = -\overline{\ln\frac{E_1}{E_0}} = -\frac{1}{N}\int\limits_0^N \ln\frac{E_1}{E_0}\,dN.$$

Das negative Vorzeichen besagt, daß es sich beim Stoß um einen Energie*verlust* handelt.

Aus dieser Gleichung wird nach den Gl. (II, 46) und (II, 47)

$$\xi = \overline{u} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \ln\frac{A^2 + 1 + 2A\cos\vartheta}{(A+1)^2}\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Die Integration ergibt:

$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1} \,. \tag{II, 48}$$

Da A im allgemeinen viel größer ist als 1, kann man die Gl. (II, 48) häufig durch eine Näherungsformel ersetzen. Es ist dann

$$\xi = \frac{6}{3A+2} \,.$$

Mit diesem Wert ξ haben wir den mittleren logarithmischen Energieverlust, den ein Neutron beim Zusammenstoß mit einem Moderatorkern der Massenzahl A erleidet, berechnet. Sind Atomkerne verschiedener Massenzahl im Moderator enthalten, wie etwa beim Wasser, so muß man, um den mittleren Energieverlust $\bar{\xi}$ zu berechnen, die verschiedenen ξ-Werte der beteiligten Atome mitteln. Die Vorschrift dafür lautet:

$$\bar{\xi} = \frac{\Sigma_{s1}\xi_1 + \Sigma_{s2}\xi_2 \ldots}{\Sigma_{s1} + \Sigma_{s2} + \ldots} \,, \tag{II, 49}$$

worin die Σ_s die makroskopischen Streuquerschnitte der im Moderator enthaltenen Kerne sind.

Eine Größe, die wir im weiteren häufig verwenden werden, ist die Anzahl der Stöße, die ein Neutron machen muß, um ein bestimmtes Energieintervall $E - E'$ zu durchlaufen. Hier bewährt sich der logarithmische Energiemaßstab, in dem ja die jeweiligen mittleren Energiestufen bei den aufeinanderfolgenden Stößen äquidistant und zwar gleich ξ sind. Die Anzahl der Stöße, die das Neutron macht, um das Energieintervall $E - E'$ zu durchlaufen, ist

$$z = \frac{\ln E - \ln E'}{\xi} = \frac{\ln \frac{E}{E'}}{\xi} \,. \tag{II, 50}$$

Ist im besonderen das Energieintervall $E - E'$ klein, so wird aus der Gl. (II, 50)

$$\Delta z = \frac{\Delta \ln E}{\xi} = \frac{\Delta E}{E \cdot \xi} \,. \tag{II, 51}$$

In dem mittleren logarithmischen Energieverlust je Zusammenstoß eines Neutrons mit einem Moderatorkern haben wir ein

Mittel zur Beurteilung von Moderatoren gewonnen. Es war ja im Anfang schon gesagt worden, daß ein Moderator jedenfalls um so besser ist, je schneller er die Neutronen zu verlangsamen vermag, d. h. je größer der mittlere Energieverlust je Stoß ist.
In der Tabelle II, 6 sind verschiedene Moderatoren mit ihren Eigenschaften aufgezählt.

Tab. II, 6 Eigenschaften von Moderatoren

Element	Massenzahl	ξ	$\xi \cdot \Sigma_s (\text{cm})^{-1}$	$\xi\, \Sigma_s/\Sigma_a$
Wasserstoff	1	1,000		
Deuterium	2	0,725		
Beryllium	9	0,206	0,16	150
Kohlenstoff	12	0,158	0,063	170
Wasser	—	0,927	1,53	70
Schweres Wasser	—	0,508	0,177	21000

Zur vollständigen Kennzeichnung eines Moderators reicht jedoch die Größe ξ nicht aus; denn das Bremsvermögen hängt auch noch von der Moderatordichte und dem Streuwirkungsquerschnitt, also vom makroskopischen Streuquerschnitt des Moderators ab. Wir definieren deshalb eine neue Größe als Maß für die Qualität eines Moderators, den Energieverlust je cm Weglänge des Neutrons $\xi/\lambda_s = \xi \cdot \Sigma_s$. Diese Größe wird der Moderatorwert genannt. Der Moderatorwert ist ebenfalls in der Tabelle Abb. II, 6 angegeben.
Schließlich interessiert für die Beurteilung eines Moderators noch sein Neutronenabsorptionsvermögen. Als Maß für die Güte eines Moderators wird die Größe $\xi\Sigma_s/\Sigma_a$ definiert, die ebenfalls in der Tabelle II, 6 angeführt ist.

4. Die Abbremsung der Spaltungsneutronen

Wir wollen nun die Kenntnisse, die wir über den Stoßvorgang im Einzelprozeß erworben haben, zur Beschreibung des summarischen Verhaltens aller Neutronen mit Energien oberhalb des thermischen Bereiches, also vom Augenblick ihres Erscheinens als schnelle Spaltungsneutronen an, bis zum Thermischwerden, verwenden. Dazu machen wir zunächst einige vereinfachende Annahmen:

1. Die Spaltungsneutronen sollen alle etwa mit der gleichen Energie entstehen. Oder anders gesagt: Es sollen innerhalb des Energiebereiches, in dem wir die Abremsung der Neutronen betrachten wollen, keine Spaltungsneutronen entstehen.
2. Es werden nur Neutronen betrachtet, die nach ihrer Entstehung als Spaltungsneutronen wenigstens drei Zusammenstöße mit Moderatorkernen erlebt haben.
3. Die untere Grenze des Energiebereiches, der hier behandelt wird, soll oberhalb der thermischen Energie liegen.
4. Während des Abbremsprozesses sollen weder durch Absorption noch durch Ausfließen aus dem Reaktor Neutronen verlorengehen.
5. Die Massenzahl der Moderatorkerne soll größer sein als eins.
6. Der ganze Abbremsprozeß sei im Mittel stationär.

Zu diesen sechs Voraussetzungen für die jetzt folgende vereinfachte Bremstheorie wird an geeigneten Stellen noch einiges zu sagen sein.

Wir beginnen mit dem Punkt 6, in dem die Stationarität der Abbremsprozesses gefordert wird.

Wir nehmen an, es entstehen je sec und je cm³ im Reaktor q Neutronen als Spaltungsneutronen. Diese q schnellen Neutronen stoßen mit Moderatorkernen zusammen, werden dabei abgebremst und erreichen nach einigen, sagen wir etwa drei, Stößen die obere Grenze des Energiebereiches, in dem nach den Forderungen 1 und 2 unsere Betrachtungen gültig sein sollen. Da nach der Forderung 4 während des ganzen Abbremsvorganges keine Neutronen verlorengehen sollen, ist die Anzahl der je sec und je cm³ in den betrachteten Energiebereich eintretenden Neutronen ebenfalls gleich q.

Die Forderung, daß der ganze Abbremsvorgang stationär sei, und nach 4 auch keine Neutronenverluste auftreten sollen, bewirkt, daß die Anzahl der Neutronen, die je sec und cm³ eine beliebige Energieschwelle E innerhalb des betrachteten Energiebereichs durchlaufen, unabhängig ist von dieser Energie E. Diese Zahl ist also immer gleich q. q wird die „Bremsdichte" genannt.

Nun aber sagt die Tatsache, daß die Bremsdichte konstant ist, direkt noch nichts darüber aus, wie sich die Neutronen auf den

ganzen Energiebereich verteilen. Diese Abhängigkeit der Neutronendichte von der Energie müssen wir erst aus den Stoßgesetzen ermitteln.

Zunächst greifen wir noch einmal auf die Gl. (II, 43) zurück. Sie lautete:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\vartheta}{(A+1)^2}, \tag{II, 52}$$

wobei wir den Index 1 bei E_1 in der Gl. (II, 43) hier fortgelassen haben.

Die Gleichung gibt an, wie sich durch den Zusammenstoß eines Neutrons mit einem Moderatorkern die ursprüngliche Neutronenenergie E_0 auf eine Energie E in Abhängigkeit vom Streuwinkel vermindert, und wir wollen feststellen, in welchen Grenzen das Neutron Energie durch einen solchen Stoß abzugeben vermag. Die geringste Energieübertragung ist sicher dann gegeben, wenn das Neutron den Moderatorkern nur streifend berührt. In diesem Falle wird gar keine Energie übertragen, d. h. es ist mit $\cos\vartheta = 1$, $E_0 - E = 0$. Hingegen wird die meiste Energie dann übertragen, wenn das Neutron den Kern zentral trifft. Dann ist $\cos\vartheta = -1$ und die geringste Energie E, die das Neutron von E_0 aus durch einen Stoß erreichen kann, ist $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0$. Das Neutron kann also je nach dem Winkel, unter dem es gestreut wird, seinen Energiebetrag E_0 nur auf einen Wert E vermindern, der zwischen $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0$ und E_0 liegt.

Nun müssen wir noch feststellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Streuwinkel die Neutronen in einzelne innerhalb des Bereiches $E_0 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0$ liegende Teilbereiche dE fallen. Dazu differenzieren wir die Gl. (II, 52) bei festgehaltenem E_0 und erhalten

$$dE = -E_0 \frac{2A}{(A+1)^2} \sin\vartheta\, d\vartheta. \tag{II, 53}$$

Ein Vergleich mit der Gl. (II, 46) und den darauffolgenden zeigt, daß die Anzahl dN der Neutronen, die von der Energie E_0 aus in den Bereich dE fallen, unabhängig ist vom Streuwinkel ϑ, d. h. auch unabhängig von der Energie E. Das bedeutet aber, daß die von der Energie E_0 aus gestreuten Neutronen sich gleichmäßig auf den Bereich zwischen E_0 und $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0$ verteilen.

In der Abb. II, 7 ist die Energieskala aufgezeichnet. Die von E_0 aus gestreuten Neutronen fallen in den Energiebereich unterhalb E_0 und bedecken ihn von $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0$ bis E_0 gleichmäßig. Das wird durch die Länge der Pfeile angedeutet. Zwischen $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0$ und E_0 liegt der schmale Bereich dE. Jedoch müssen wir unsere Ausdrucksweise ein wenig korrigieren; denn die Verteilung der Neutronen auf die Energieskala ist kontinuierlich, und damit hat die Aussage, daß Neutronen von der Energie E_0 aus gestreut werden, keinen Sinn. Wir umgeben deshalb die Energie E_0 mit einem schmalen Bereich dE_0 und führen ähnlich wie im Abschnitt II, 1, eine Funktion $F(E_0)$ ein, die so zu verstehen ist, daß $F(E_0)\,dE_0$ die Anzahl der Neutronen ist, die je cm³ und je sec durch Streuung das Energieintervall dE_0 verlassen und in den unterhalb E_0 liegenden Bereich fallen. Mit den Neutronen, die von E_0 aus gestreut werden, war also eigentlich diese Anzahl $F(E_0)\,dE_0$ gemeint.

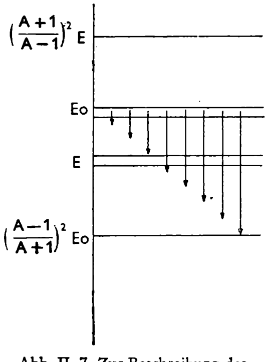


Abb. II, 7. Zur Beschreibung des Neutronenbremsprozesses

Da unser Ziel ist, die Anzahl q_{th} der Neutronen zu berechnen, die je sec und je cm³ thermisch werden, interessieren wir uns zunächst einmal für die Anzahl der Neutronen, die je sec und je cm³ irgendeine Energieschwelle unterschreiten. Wir wählen für diese Energieschwelle den Wert E. Von der Anzahl der aus dem Energieabschnitt dE_0 bei E_0 in den Bereich $E_0 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0$ fallenden Neutronen $F(E_0)\,dE_0$ fällt wegen der gleichmäßigen Verteilung auf den Bereich der Bruchteil

$$\text{(II, 54)} \qquad F(E_0)\,dE_0 \frac{E - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0}{E_0 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0}$$

in den Energiebereich unterhalb der Schwelle E. Das sind aber nur die aus dem schmalen Energiebereich dE_0 stammenden Neutronen. Um alle Neutronen zu erfassen, die je sec und je cm³ die

Schwelle E unterschreiten, müssen wir den Wert in der Gl. (II, 54) noch integrieren über den ganzen Energiebereich, aus dem überhaupt durch einen Stoß ein Neutron die Schwelle E erreichen kann. Das ist der Energiebereich $\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E - E$. Die Anzahl der Neutronen, die je sec und je cm³ die Schwelle E unterschreitet, ist also:

(II, 55) $$q(E) = \int\limits_{E}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E} F(E_0) \frac{E - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0}{E_0\left[1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\right]} dE_0 .$$

Nun fehlt uns noch die Funktion $F(E_0)$, über deren Gestalt wir bisher noch nichts aussagen konnten. Erinnern wir uns aber an die oben gestellte Bedingung, daß die Bremsdichte q für jede beliebige Energieschwelle die gleiche sein soll, so kann man diese Forderung in der Form $dq/dE = 0$ schreiben, wobei die Energieschwelle E beliebig zu setzen ist. Durch Differenzieren der Gl. (II, 55) erhalten wir

$$\frac{dq}{dE} = \frac{d}{dE} \int\limits_{E}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E} F(E_0) \frac{E - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_0}{E_0\left[1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\right]} dE_0$$

$$= \int\limits_{E}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E} F(E_0) \frac{dE_0}{E_0\left[1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\right]} - F(E).$$

Setzen wir $\frac{dq}{dE} = 0$, so erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für die Funktion $F(E)$:

(II, 56) $$F(E) = \int\limits_{E}^{\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^2 E} F(E_0) \frac{dE_0}{E_0\left[1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\right]}$$

Eine Lösung dieser Integralgleichung lautet, wie man sich durch Einsetzen überzeugen kann:

$$F(E) = \frac{C}{E},$$

worin C eine Konstante ist. Mit dieser Funktion $F(E)$ können wir das Integral in der Gl. (II, 55) lösen und erhalten:

$$q = C\left[1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1}\right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist aber gerade der Wert, den wir in der Gl. (II, 48) für den mittleren Energieverlust ξ je Neutronenstoß berechnet hatten. Es ist also

(II, 57) $$q = C\xi = F(E)E\xi.$$

Wir wollen nun noch die Größe $F(E)$ ein wenig anders schreiben. $F(E)$ war ja so definiert, daß $F(E)dE$ die Anzahl der Neutronen ist, die je sec und je cm³ bei der Energie E im Energieintervall dE mit Moderatorkernen zusammenstoßen und dadurch das Energieintervall dE verlassen. Verwenden wir jetzt wieder die in der Gl. (II, 13) eingeführte, von der Neutronenenergie abhängige Flußdichte je Energieeinheit $\varphi(E)$, so ist nach dem, was wir im Abschnitt über Wirkungsquerschnitte gesagt haben $\Sigma_s\varphi(E)dE$ die Anzahl der Neutronen, die bei der Energie E je cm³ und je sec im Energieintervall dE gestreut werden. Das ist also gerade auch der Wert $F(E)dE$. Es ist demnach:

(II, 58) $$F(E) = \Sigma_s\varphi(E).$$

Damit erhalten wir für die Bremsdichte

(II, 59) $$q = \xi\Sigma_s\varphi(E)E.$$

Wir erweitern diese Gl. (II, 59) um ihren physikalischen Inhalt anschaulicher zu machen, mit dem Energieintervall dE und bauen sie ein wenig um:

(II, 60) $$q\frac{dE/E}{\xi} = q\frac{d\ln E}{\xi} = \Sigma_s\varphi(E)dE.$$

Erinnern wir uns nun der Gl. (II, 51), so ist der Quotient $\frac{d\ln E}{\xi}$

$= \frac{dE/E}{\xi}$ die Anzahl der Stöße, die ein Neutron braucht, um das Energieintervall dE bei der Energie E zu durchlaufen. Multipliziert man diese Anzahl mit q, der Zahl der Neutronen, die je sec und je cm³ die Energieschwelle $E + dE$ unterschreiten, so steht auf der linken Seite der Gl. (II, 60) die Anzahl der Neutronen, die je sec und je cm³ im Energieintervall dE an Moderatorkernen gestreut werden, und diese Zahl gibt, wie wir aus der Definition des Streuquerschnittes Σ_s wissen, auch die rechte Seite der Gl. (II, 60) an.

Nun soll noch einiges zu den einschränkenden Voraussetzungen gesagt werden, die wir an den Anfang dieser Rechnung stellten.

Zunächst zur Voraussetzung 1, die besagte, daß innerhalb des betrachteten Energiebereichs keine Spaltungsneutronen auftreten sollen. Das mußten wir fordern, weil sonst unsere Annahme der konstanten Bremsdichte q nicht gestimmt hätte. In der Gl. (II, 55) hätte dann ein zusätzlicher energieabhängiger Quellterm erscheinen müssen, der die Rechnung kompliziert gemacht hätte. Wir wollen abschätzen, ob der Fehler, den wir durch die Vernachlässigung der Spaltungsneutronen gemacht haben, groß ist.

Als Beispiel nehmen wir an, der Moderator sei Graphit, also Kohlenstoff mit der Massenzahl 12. Die durchschnittliche Energie der Spaltungsneutronen betrage etwa 2 MeV. Die thermische Energie, auf die die Neutronen abgebremst werden, sei 0,025 eV. Dann ist die Anzahl der Stöße, die das Neutron machen muß, um die Energiespanne von 2 MeV zu 0,025 eV zu durchlaufen, nach der Gl. (II, 50) $z_1 = \frac{1}{\xi}(\ln 2 \cdot 10^6 - \ln 0{,}025)$. Da ξ für Kohlenstoff 0,158, wird $z_1 = 115$. Andererseits haben wir bis herab zu etwa 0,1 MeV mit Spaltneutronen zu rechnen. Die Anzahl der Neutronenstöße bis zu dieser Energie ist $z_2 = \frac{1}{\xi}(\ln 2 - \ln 0{,}1) = 19$ Stöße. Der Bereich, in dem die obige Rechnung nicht stimmt, ist also weniger als $^1/_6$ des gesamten Bremsbereiches. Hinzu kommt, daß die oben angegebenen Formeln recht unempfindlich sind gegen den Einfluß von Quellneutronen dieser Art und daß der für die Reaktortechnik interessantere Energiebereich der untere ist.

Aus einem ähnlichen Grunde wurde die Voraussetzung 2 eingeführt. Sie betrifft auch den oberen Energiebereich. Nehmen wir jetzt der Einfachheit halber einmal an, die Spaltungsneutronen entständen alle mit der gleichen Energie E_{sp}, so werden diese Spaltungsneutronen nach dem ersten Stoß in das Energieband $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_{sp}$ bis E_{sp} hineinfallen.

Wollten wir nun die Bremsdichte innerhalb dieses obersten Energiebandes ausrechnen, so wäre dazu der in der Gl. (II, 55) angegebene Formalismus ungeeignet; denn der Integrationsbereich darf ja nicht über die obere Grenze E_{sp} hinausreichen. Außerdem paßt der monoenergetische Quellterm nicht in die obige Ableitung. Unsere Formeln können also das Verhalten der Neutronen im Bereich $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_{sp}$ bis E_{sp} nicht richtig beschreiben. Aber auch unterhalb der Energie $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_{sp}$ stimmen die Formeln nicht ganz, weil es eine Rückwirkung der monoenergetischen Neutronenquelle nicht nur auf den Bereich $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_{sp}$ bis E_{sp} gibt, sondern auch von $\left[\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2\right]^2 E_{sp}$ bis $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_{sp}$ usw. Das liegt in der Natur der Integralgleichung (II, 56) begründet. Allerdings klingen die Rückwirkungen mit geringer werdender Energie rasch ab und sind unterhalb $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^6 E_{sp}$, d. h. nach wenigen Stößen, zu vernachlässigen. In dem Energiebereich $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^6 E_{sp}$ bis E_{sp} sind ja aber unsere Formeln wegen der breiten Energieverteilung der Spaltungsneutronen ohnehin nicht brauchbar.
Übrigens tritt eine ähnliche Rückwirkung wie die der monoenergetischen Spaltungsneutronenquelle auch im tieferliegenden Energiebereich immer dann auf, wenn bei einer bestimmten Energie eine starke Neutronenabsorption vorhanden ist. Das ist ja beim Resonanzeinfang der Neutronen der Fall. Eine solche bei einer Energie E_r liegende Resonanzspitze wirkt sich ebenfalls im Bereich unterhalb E_r bis etwa $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^6 E_r$ aus. Wir werden deshalb später bei der Ableitung der sogenannten Resonanzentkommwahrscheinlichkeit voraussetzen, daß die Resonanzspitzen einen geringsten Energieabstand $E_r\left[1-\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^6\right]$ haben. Ist das nicht der Fall, so besteht eine Kopplung zwischen den Spitzen.
In der Voraussetzung 3 wurde gefordert, daß die Gleichungen nicht angewendet werden sollen auf den Energiebereich dicht oberhalb des thermischen. Dort wird die Bewegungsenergie der Moderatorkerne vergleichbar mit der der Neutronen, was den Voraussetzungen widerspricht, die wir bei der Ableitung der Formeln für den Einzelstoß gemacht haben. Der relative Energieverlust je Stoß ist dann nicht mehr konstant, d. h. von der Energie unabhängig. Aber auch dieser Energiebereich, den wir von der Berechnung ausschließen müssen, ist relativ klein.

Die Voraussetzung 4 ist einschneidender als die anderen, sie mußten wir, wie schon gesagt, machen, um die Bremsdichte q

konstant setzen zu können. Sie ist natürlich keineswegs erfüllt; denn einerseits fließen während des Abbremsprozesses Neutronen durch die Wände des Reaktors aus, andererseits liegen ja im Abbremsbereich die Resonanzspitzen des Uran-238 und des Thoriums-232, die Neutronen absorbieren. Für beide Fälle bedarf unsere Berechnung noch einer Korrektur. Eine strenge Theorie, die das Ausfließen und die Resonanzabsorption exakt berücksichtigt, gibt es jedoch nicht, weil sie zu kompliziert wäre. Man hilft sich so, daß man die Abbremstheorie ohne Berücksichtigung des Ausflusses und der Resonanzabsorption, so wie wir sie jetzt geschildert haben, als erste Näherung gelten läßt. Ausfluß und Resonanzabsorption setzt man dann in Form von Korrekturfaktoren in Rechnung. So definiert man einen sogenannten „Nichtausflußfaktor für schnelle Neutronen P_s“, der den Anteil der Neutronen angibt, die während des Abbremsprozesses im Reaktor geblieben, d. h. nicht ausgeflossen sind. Ebenso definiert man eine „Resonanzentkommwahrscheinlichkeit“ oder „p-Faktor“, der den Bruchteil der Neutronen angibt, die während des Abbremsprozesses dem Resonanzeinfang entkommen.

Auf unsere Bremsdichte q angewandt, besagen die Korrekturfaktoren, daß

(II, 61) $$q_{th} = P_s \cdot p \cdot q_{sp}$$

ist, wenn q_{th} die Anzahl der Neutronen ist, die je cm³ und je sec thermisch werden und q_{sp} die Anzahl der je sec und je cm³ entstehenden Spaltungsneutronen. Die Werte P_s und p dürfen natürlich, damit ihre Verwendung als Korrekturfaktoren im obigen Sinne gerechtfertigt ist, nicht wesentlich kleiner sein als eins.

Der Grund für die Voraussetzung 5 ist ein ähnlicher wie der für die Voraussetzung 2. Besteht der Moderator aus Wasserstoff, ist also die Massenzahl der streuenden Kerne $A = 1$, so kann die Energie eines Spaltungsneutrons mit einem einzigen Stoß an das gestoßene Wasserstoffatom abgegeben werden. Mit einem einzigen Stoß kann also das Neutron thermisch werden. Das heißt aber, daß unsere eben bei der Besprechung der Voraussetzung 2 gemachte Feststellung, daß die obigen Formeln nicht im Energiebereich $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_{sp}$ bis E_{sp} anwendbar sind, wegen des unmittel-

baren Einflusses der Spaltungsneutronen, hier für den ganzen Energiebereich von E_{sp} bis E_{th} zutrifft. Die Energie E_{sp} sei im folgenden wieder für alle Spaltungsneutronen die gleiche.

Wir wollen, um das klarer zu machen, den Abbremsprozeß im Wasserstoffmoderator kurz durchrechnen. Es wird die gleiche Bezeichnungsweise wie zuvor gebraucht. Wir haben es hier jedoch wegen $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 = 0$ nur mit einem einzigen Energieintervall 0 bis E_{sp} zu tun. Die thermische Energie entspricht der Energie 0. An die Stelle des Ausdruckes (II, 54) ist jetzt

(II, 62) $$F(E_0)\,dE_0 \cdot \frac{E}{E_0},$$

und an die der Gl. (II, 55)

(II, 63) $$q_1(E) = \int_E^{E_{sp}} F(E_0)\frac{E}{E_0}\,dE_0$$

zu setzen.

In dieser Gl. (II, 63) sind nur die Neutronen gemeint, die bereits durch einen Stoß in den Bereich dE_0 gelangt waren. Außerdem sind aber noch die Spaltungsneutronen vorhanden, die bei ihrem *ersten* Stoß in den Energiebereich 0 bis E_{sp} gestreut werden. Die Anzahl dieser Neutronen ist je cm³ und sec gleich q, der Bremsdichte selber. Der Anteil der Neutronen, die durch ihren ersten Stoß die Energie E durchfallen, ist

(II, 64) $$q_2(E) = q\frac{E}{E_{sp}}.$$

Beide Anteile Gl. (II, 63) und (II, 64) zusammen müssen wieder die Gesamtbremsdichte q liefern.

(II, 65) $$q(E) = q\frac{E}{E_{sp}} + \int_E^{E_{sp}} F(E_0)\frac{E}{E_0}\,dE_0.$$

Indem wir wieder $\frac{dq}{dE} = 0$ setzen, erhalten wir für $F(E)$:

(II, 66) $$F(E) = \frac{q}{E}.$$

Wir haben also hier am Beispiel des Wasserstoffmoderators gezeigt, wie der Einfluß der monoenergetischen Spaltneutronen auf den Energiebereich unmittelbar unterhalb der Spaltungsenergie E_{sp} zu behandeln ist. Ähnlich müßten wir auch verfahren, um im Falle der schwereren Moderatorkerne das Verhalten der Neutronen im Energiebereich $\left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E_{sp}$ bis E_{sp} zu berechnen. Wir wollen diese Rechnung jedoch nicht ausführen, weil, wie wir wissen, die Voraussetzung der monoenergetischen Spaltungsneutronen doch nie gegeben ist.

5. Die Diffussion der Neutronen im Abbremsbereich

Dieser Abschnitt gilt der Berechnung des Nichtausflußfaktors für schnelle Neutronen P_s. Um ihn zu erhalten, müssen wir die Diffusion der schnellen Neutronen betrachten. Die Schwierigkeit dabei liegt, wie wir bereits im Abschnitt II, 1 andeuteten, darin, daß die schnellen Neutronen im Gegensatz zu den thermischen nicht monoenergetisch sind. Die Diffusionskonstante D ist jetzt abhängig von der Energie der Neutronen, so daß Neutronen höherer Energie schneller diffundieren als die geringerer Energie.

Wir gehen so vor, daß wir zunächst einmal aus allen Neutronen, die sich im Abbremsbereich aufhalten, diejenigen herausgreifen, die in einem kleinen Energieintervall zwischen E und $E + dE$ liegen. Diese Neutronen werden als monoenergetisch betrachtet, und für sie können wir eine Diffusionsgleichung aufstellen. Die Diffusionskonstante, die für alle Neutronen im Intervall E bis $E + dE$ die gleiche sein soll, sei $D(E)$.

Wieder betrachten wir, wie bei der Bremstheorie, nur den Energiebereich, in dem keine Neutronenquelle in der Form von Spaltungsneutronen auftritt, also etwa den Bereich unterhalb 0,1 MeV. Fernerhin soll keine Absorption schneller Neutronen im Reaktor berücksichtigt werden. Überhaupt sollen im wesentlichen die gleichen Voraussetzungen gelten, die wir an den Anfang der Bremstheorie im Abschnitt II, 4 stellten, aber mit dem grundsätzlichen Unterschied, daß hier der Ausfluß der schnellen Neutronen die entscheidende Rolle spielt.

Da weder negative noch positive Quellen zugelassen sind, lautet die Diffusionsgleichung für den Energiebereich zwischen E und

$E + dE$ gemäß der Gl. (II, 26):

$$D(E)\,\Delta\varphi(E)dE = \frac{d[n(E,t)dE]}{dt}\,. \qquad \text{(II, 67)}$$

An die Stelle des Flusses Φ der monoenergetischen thermischen Neutronen muß hier wegen der Energieabhängigkeit wieder die Größe $\varphi(E)dE$ nach der Definition Gl. (II, 13) erscheinen. Ebenso tritt an die Stelle der Neutronenzahl pro cm² die Größe $n(E)dE$. Im Gegensatz zur Gl. (II, 26) wird in dieser Diffusionsgleichung der totale Differentialquotient $\frac{dn}{dt}$ geschrieben, womit gesagt sein soll, daß n nicht nur von der Zeit (und vom Ort natürlich), sondern auch von der Energie abhängt, und daß die Differentiation nach beiden Variablen ausgeführt werden soll. Aus der Gl. (II, 67) wird damit:

$$D(E)\,\Delta\varphi(E)dE = \frac{\partial(ndE)}{\partial t} + \frac{\partial(ndE)}{\partial E}\,\frac{dE}{dt}\,.$$

Wieder, wie bei der Bremstheorie, soll jedoch nur der stationäre Fall behandelt werden. D. h. $\frac{\partial(ndE)}{\partial t}$ wird gleich null gesetzt:

$$D(E)\,\Delta\varphi(E)dE = \frac{\partial(ndE)}{\partial E}\,\frac{dE}{dt}\,. \qquad \text{(II, 68)}$$

Die Vorstellung bei der Gl. (II, 68) ist die, daß man bei stationärem Betrieb eines Reaktors eine bestimmte Anzahl schneller Neutronen $n(E)\delta E$ — wir wollen, um einer Verwechslung vorzubeugen, an die Stelle des Differentials dE die Differenz δE schreiben — beim Beginn des Abbremsvorganges ins Auge faßt und das Schicksal dieser Anzahl Neutronen während des Abbremsens verfolgt. Die Gl. (II, 68) besagt dann, daß ein Teil dieser Neutronen im Laufe der Zeit durch Ausfluß verlorengeht.

Bei der Behandlung der Gl. (II, 68), die wir jetzt

$$D(E)\,\Delta\,\varphi(E)\delta E = \frac{\partial n(E)\delta E}{\partial E}\,\frac{dE}{dt} \qquad \text{(II, 69)}$$

schreiben, ist zu beachten, daß in dem Differentialquotienten $\frac{\partial(n\delta E)}{\partial E}$ nicht nur das $n(E)$ von der Energie abhängt, sondern auch die Intervallbreite δE. Wir müssen also zuerst sehen, wie sich δE mit der Energie ändert. Dazu benutzen wir die Gl. (II, 60), die die Neutronenbremsung ohne Berücksichtigung des Ausflusses beschreibt. Das Gesetz der Änderung von δE mit der Energie E unter der Annahme, daß die

Anzahl der ins Auge gefaßten $n(E)\delta E$ Neutronen konstant bleibt, falls keine Neutronen ausfließen, wollen wir aus der Gl. (II, 60) ermitteln und dieses δE dann in die Gl. (II, 69) einsetzen.

Die Gl. (II, 60) lautete:

$$q\delta E = \xi\Sigma_s E\varphi(E)\delta E = \xi\Sigma_s En(E)v(E)\delta E$$

(II, 70)
$$= \xi\sqrt{\frac{2}{m}}\,\Sigma_s E^{3/2} n(E)\delta E,$$

worin $\varphi(E) = n(E)v(E) = n(E)\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E}$ gesetzt wurde mit der mittleren Neutronengeschwindigkeit $v(E)$ und der Neutronenmasse m. Es ist also

$$n\delta E = q\sqrt{\frac{m}{2}}\,E^{-3/2}\frac{\delta E}{\xi\Sigma_s}\,.$$

Die Zahl der Neutronen $n\delta E$ soll von der Energie unabhängig sein, d. h.

(II 71)
$$\frac{dn\delta E}{dE} = 0 = q\sqrt{\frac{m}{2}}\left[-{}^3/_2\frac{\delta E}{\xi\Sigma_s}E^{-5/2} + E^{-3/2}\frac{d\frac{\delta E}{\xi\Sigma_s}}{dE}\right]$$

oder

(II, 72)
$$\delta E = K\xi\Sigma_s E^{3/2}\,,$$

worin K eine Integrationskonstante ist.

Die Intervallbreite $\delta E(E)$ geht also, da $\xi\Sigma_s$ nahezu konstant ist, im wesentlichen mit $E^{3/2}$.

Machen wir uns nun noch klar, daß die Energie E direkt von der Zeit abhängt, so können wir die Gl. (II, 72) etwas anders schreiben:

Die Anzahl der Stöße, die ein Neutron mit Moderatorkernen machen muß, um das Energieintervall dE zu durchlaufen, ist nach der Gl. (II, 51) $dz = \frac{1}{\xi}\frac{dE}{E}$. Andererseits ist aber diese Anzahl der Stöße dz gleich dem Weg $v \cdot dt$, den das Neutron in der Zeit dt zurücklegt, dividiert durch die mittlere freie Streuweglänge λ_s. Es ist also

$$\frac{1}{\xi}\frac{dE}{E} = \frac{vdt}{\lambda_s} = \Sigma_s v\,dt$$

oder, indem wir auch wieder $v = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E}$ setzen:

(II, 73)
$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,\xi\Sigma_s E^{3/2}.$$

Nun schreiben wir noch für δE in der Gl. (II, 72) $\delta E = \frac{dE}{dt}\delta t$, worin δt die δE entsprechende Zeitdifferenz ist und erhalten durch Vergleich der Gl. (II, 72 und II, 73):

(II, 74) $$\frac{dE}{dt}\,\delta t = \frac{dE}{dt} K \sqrt{\frac{m}{2}}\,.$$

Die neu eingeführte Zeitdifferenz δt ist also eine Konstante. Ihr Wert interessiert hier nicht weiter.

Nun können wir auch die Gl. (II, 68) umschreiben, indem wir auch hier $\delta E = \frac{dE}{dt}\delta t$ schreiben und das δt als Konstante aus dem Differentialquotienten herausziehen:

$$D(E)\,\Delta\varphi(E)\,\delta E = \frac{\partial\, n\left(\frac{dE}{dt}\right)}{\partial E}\,\delta t\,\frac{dE}{dt}\,.$$

Daraus wird, wenn wir $\frac{\delta E}{\delta t} = \frac{dE}{dt}$ setzen:

$$D(E)\,\Delta\varphi(E) = \frac{\partial\, n\frac{dE}{dt}}{\partial E}\,.$$

Mit $\varphi(E) = \frac{1}{\xi\Sigma_s E}\,q$ [Gl. (II, 59)] und $n\,\frac{dE}{dt} = \xi\Sigma_s E\varphi$ erhalten wir

(II, 75) $$\Delta q = \frac{\xi\Sigma_s(E)\,E}{D(E)}\,\frac{\partial q}{\partial E}\,.$$

Diese Gl.(II, 76) ist im wesentlichen von der Art der Wärmeleitungsgleichung nur mit dem Schönheitsfehler behaftet, daß die „Wärmeleitzahl" nicht konstant ist. Man spaltet die Gl. (II, 75) durch eine Transformation auf in zwei Differentialgleichungen, indem man eine neue Veränderliche τ einführt, so daß:

(II, 76) $$d\tau = \frac{D(E)}{\xi\Sigma_s(E)\,E}\,dE$$

und

(II, 77) $$\Delta q = \frac{\partial q}{\partial\tau}$$

ist.

Durch Integration der Gl. (II, 77) über den Energiebereich der Neutronenabbremsung, also von E_{sp} bis E_{th} erhalten wir:

(II, 78) $$\tau_{th} = \int_{E_{th}}^{E_{sp}} \frac{D(E)}{\xi \Sigma_s(E) E} dE .$$

Die Größe τ hat den Namen Fermialter bekommen. Sie ist in der Tat eine Art Alter, nämlich das Alter, das die Neutronen vom Augenblick ihrer Entstehung als Spaltungsneutron bis zu ihrer Abbremsung auf eine Energie E bzw. E_{th} erreichen. Allerdings

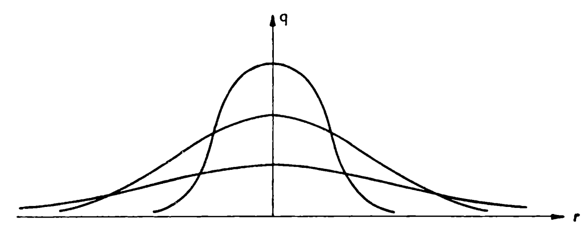


Abb. II, 8. Die Abhängigkeit der Bremsdichte q vom Quellabstand r bei verschiedenem Fermialter τ. Mit wachsendem τ wird die Kurve flacher

hat das Fermialter nicht die Dimension einer Zeit, sondern die einer Fläche. Es ist deshalb besser, ein geometrisches Maß für das Fermialter zu wählen als ein zeitliches.

Wir lösen dafür die Gl. (II, 77) wieder, ähnlich wie bei der Ableitung der mittleren freien Weglänge in radialsymmetrischen Koordinaten:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial \tau} .$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

(II, 79) $$q = (4\pi\tau)^{-3/2} e^{-r^2/4\tau} .$$

Das ist bei festem τ und variablem r eine Gaußverteilung der Bremsdichte. Sie ist in der Abb. II, 8 für verschiedene Werte von τ dargestellt. Die Meinung der Abb. II, 8 ist die folgende:

Setzen wir bei dem Fermialter 0 eine Anzahl schneller Spaltungsneutronen an der Stelle $r = 0$ in einen Moderator ein, so werden im Laufe der Zeit, also mit wachsendem Fermialter dieser

Neutronen, mehr und mehr von ihnen im Moderator von ihrem ursprünglichen Einsatzort wegdiffundiert sein. Die Verteilungskurve wird, je mehr Energie die Neutronen abgeben, und je mehr ihr Alter fortschreitet, immer flacher werden. Die Neutronenwolke fließt auseinander. Um nun das geometrische Maß für das Fermialter anzugeben, bilden wir nach der Vorschrift, die wir aus der Ableitung der mittleren freien Weglänge schon kennen, das mittlere Quadrat der Strecke, um die sich die Neutronen nach dem Erreichen des Fermialters τ vom Ursprung entfernt haben:

$$\overline{r^2(\tau)} = \frac{\int\limits_0^\infty r^2\, 4\pi r^2\, q(r,\tau)\, dr}{\int\limits_0^\infty 4\pi r^2\, q(r,\tau)\, dr} = \frac{\int\limits_0^\infty r^4 e^{-r^2/4\tau}\, dr}{\int\limits_0^\infty r^2 e^{-r^2/4\tau}\, dr}\,.$$

Nennen wir jetzt $\int\limits_0^\infty e^{-r^2/4\tau}\, dr = J\left(\frac{1}{4\tau}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{4\tau}}}$, so ist

$$\overline{r^2(\tau)} = -\frac{d^2 J}{\left[d\left(\frac{1}{4\tau}\right)\right]^2} \Bigg/ \frac{dJ}{d\frac{1}{4\tau}} = 6\tau\,. \tag{II, 80}$$

Das Fermialter τ ist also gleich $^1/_6$ des mittleren Wegquadrates, das die Neutronen nach Erreichen dieses Alters τ im Reaktor zurücklegen. Interessant ist für uns wieder das Fermialter der Neutronen, die gerade thermisch werden. Das Fermialter eines thermischen Neutrons τ_{th} ist gleich $^1/_6$ des mittleren Wegquadrates, das das Neutron vom Ort seiner Entstehung aus zurückgelegt hat, bis es die thermische Energie erreichte.

Daß das Fermialter nicht linear mit dem Weg wächst, den es zurücklegt, liegt an der Natur der Gl. (II, 78). Es hat seinen Grund in der statistischen Art des Weges, den das Neutron bei der Streuung zurücklegt. Wir werden diesem Gesetz noch einmal bei der Ableitung der Diffusionskonstanten D begegnen.

In der Tabelle II, 9 ist das Fermialter τ_{th} für einige Moderatoren angegeben.

Tabelle II, 9

Moderator	Fermialter τ_{th}	Diffusionslänge L
Wasser	33 cm²	2,88 cm
Schweres Wasser	120 cm²	100 cm
Graphit (Dichte = 1,6)	350 cm²	50,2 cm

Um den Nichtausflußfaktor P_s zu berechnen, müssen wir nun die Fermigleichung Gl. (II, 77) für unseren Reaktor lösen. Die Fermigleichung ist ja eine ähnliche Diffusionsgleichung wie die stationäre Diffusionsgleichung der thermischen Neutronen Gl. (II, 26), nur erscheint hier noch außer den räumlichen Koordinaten die Veränderliche τ. Außerdem steht an der Stelle des Flusses Φ der thermischen Neutronen die Bremsdichte $q(\mathfrak{r}, \tau)$, die Anzahl der Neutronen, die je sec und je cm³ das Alter τ erreichen:

(II, 81) $$\Delta q(\mathfrak{r}, \tau) = \frac{\partial q(\mathfrak{r}, \tau)}{\partial \tau}.$$

$\mathfrak{r}$ soll darin die räumlichen Koordinaten kennzeichnen.
Wie bei der Behandlung der Wärmeleitungsgleichung löst man die Gl. (II, 81) durch einen Produktansatz:

(II, 82) $$q(\mathfrak{r}, \tau) = R(\mathfrak{r}) \cdot T(\tau).$$

worin die Funktion $R(\mathfrak{r})$ nur die räumlichen Koordinaten und $T(\tau)$ nur die Veränderliche τ enthalten soll.
Aus der Gl.(II, 81) wird damit nach Division durch das Produkt $R \cdot T$

(II, 83) $$\frac{\Delta R(\mathfrak{r})}{R(\mathfrak{r})} = \frac{1}{T(\tau)} \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau}.$$

Da links des Gleichheitszeichens nur eine Funktion von $\mathfrak{r}$, rechts nur eine von τ steht, müssen beide Seiten gleich einer Konstanten sein, die wir B^2 nennen wollen. B ist der in der Gl. (II, 34) schon einmal erwähnte Krümmungsfaktor.
Aus der Gl. II, 83 folgt dann

(II, 84) $$\Delta R(\mathfrak{r}) + B^2 R(\mathfrak{r}) = 0 \text{ und } \frac{dT(\tau)}{d\tau} = -B^2 T(\tau).$$

Die linke dieser Gln. (II, 84) sagt, wie später noch einmal erklärt wird, lediglich, daß die räumliche Verteilung der Neutronen im

Abbremsbereich ebenso verläuft, wie die der thermischen. Sie diente uns nur dazu, die Konstante B^2 für die rechte Gleichung zu liefern.

Aus der rechten der Gln. (II, 84) gewinnen wir

$$T(\tau) = T_{sp} e^{-B^2 \tau},$$

worin T_{sp} eine Konstante ist, die wir gleich so festgelegt haben, daß $T_{sp} = T(0)$ ist. Indem wir wieder den ortsabhängigen Anteil hinzufügen, erhalten wir:

(II, 85) $$q(\mathfrak{r}, \tau) = q_{sp}(\mathfrak{r})\, e^{-B^2 \tau} \text{ bzw. } q_{th}(\mathfrak{r}, \tau_{th}) = q_{sp}(\mathfrak{r})\, e^{-B^2 \tau_{th}}.$$

Da nun q_{sp} die Anzahl der Neutronen ist, die mit dem Fermialter $\tau = 0$ als Spaltungsneutronen entstehen, und q_{th} die Zahl derer, die thermisch werden, ist das Verhältnis q_{th}/q_{sp} der Bruchteil der Neutronen, die während des Abbremsprozesses nicht ausgeflossen sind; also der Nichtausflußfaktor P_s:

(II, 86) $$P_s = \frac{q_{th}}{q_{sp}} = e^{-B^2 \tau_{th}}.$$

Der Bruchteil $1 - P_s$ der Neutronen ist während des Abbremsens durch die Corebegrenzungen ausgeflossen.

Es sei nochmals bemerkt, daß in diesem Faktor P_s noch nicht die Resonanzabsorption im Innern des Reaktors enthalten ist. Die „Resonanzentkommwahrscheinlichkeit“ p werden wir erst im übernächsten Abschnitt kennen lernen.

6. Die Diffusionskonstante

Von der Diffusionskonstanten hatten wir bisher nur erfahren, daß sie der Proportionalitätsfaktor in der Gleichung

(II, 87) $$D \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -j_x;\; D \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -j_y;\; D \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -j_z$$

ist, oder kürzer geschrieben:

(II, 88) $$D \operatorname{grad} \Phi = -\mathfrak{j}.$$

Darin ist D die Diffusionskonstante, $\operatorname{grad} \Phi$ der Gradient, d. h. das Gefälle von Φ, und $\mathfrak{j}$ die Diffusionsstromdichte.

Die Gl. (II, 87) bzw. (II, 88) erweckt auf den ersten Blick den Anschein, als ob das Gefälle des Neutronenflusses in der Richtung $\mathfrak{j}$ die Ursache für den Neutronentransport in dem Sinne wäre, daß etwa von den

Stellen in der Materie aus, an denen die Neutronendichte größer ist als an einer anderen eine treibende Kraft zwischen den Neutronen wirke, die den Dichteunterschied auszugleichen bestrebt sei. Das Gegenteil ist der Fall. Die Diffusion der Neutronen ist ein statistischer Vorgang, bei dem keine Wechselwirkung zwischen den einzelnen Neutronen zu bestehen braucht. Wir werden auch in der folgenden Ableitung keine solche annehmen.

Wir betrachten die Diffusion monoenergetischer Neutronen in einem streuenden Material, dessen Atomkerne zunächst als so schwer angenommen werden, daß sie von den Neutronen, die sie treffen, nicht aus ihrer Ruhelage bewegt werden. Die Neutronen werden auf Zickzackbahnen die Materie durchlaufen und ihre Anfangsgeschwindigkeit während des ganzen Diffusionsvorganges beibehalten. Es sollen also nur elastische Stöße ohne Energieübertragung von Neutronen auf Atomkerne und keine Absorption stattfinden. Die Kerne sollen als kugelförmig angesehen werden, so daß die Streuung isotrop ist, d. h. dem in der Gl. (II, 46) abgeleiteten Gesetz gehorcht, daß die Wahrscheinlichkeit der Streuung eines Neutrons, das einen Kern trifft, in einem Raumwinkelbereich $d\Omega$ unabhängig ist von dem Winkel, unter dem es gestreut wird. Jede Streurichtung ist also gleich wahrscheinlich. Ein Neutron möge zum Zeitpunkt $t = 0$ seinen Zickzackweg durch die Materie an einem Punkte $x = x_0$ in einer Richtung beginnen, die mit der x-Achse den Winkel ϑ_1 bildet. Es möge auf diese Weise geradlinig fliegend nach Zurücklegen einer Strecke s_1 auf einen Atomkern stoßen. Die Komponente dieser ersten Laufstrecke in der x-Richtung ist $x_1 - x_0 = s_1 \cos \vartheta_1$ (Abb. II, 10).

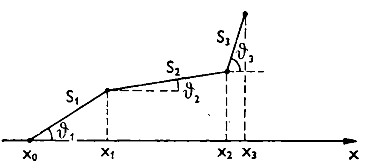


Abb. II, 10. Der Weg eines an Kernen gestreuten Neutrons. Durch die Punkte sind die Kerne angedeutet

An dem Atomkern wird das Neutron isotrop gestreut, d. h. von dem Kern des ersten Zusammenstoßes aus kann es in jeder Richtung mit der gleichen Wahrscheinlichkeit weiterfliegen. Wir nehmen an, es fliege vom Punkt seines ersten Zusammenstoßes aus bis zum zweiten Stoß eine Strecke s_2 unter einem Winkel ϑ_2 gegen die x-Achse. Die x-Komponente seiner Bewegung bis zum zweiten Stoß ist also $x_2 - x_0 = s_1 \cos \vartheta_1 + s_2 \cos \vartheta_2$.

Das geht in der gleichen Weise so fort. Nach m Stößen ist die x-Komponente

$$x_m - x_0 = \sum_{\nu=1}^{m} s_\nu \cos \vartheta_\nu \,. \qquad \text{(II, 89)}$$

Es soll nun ausgerechnet werden, um wieviel sich das Neutron in einer gewissen Zeit von seinem Ausgangspunkt im Mittel fortbewegt hat. Es interessiert dabei immer nur die x-Komponente. Würden wir

aber einfach über die Gl. (II, 89) mitteln, so käme bei großen Zahlen m von Stößen $x_m - x_0 = 0$ heraus. Das heißt, das Neutron bewegt sich im Mittel gerade so oft in die Richtung positiver wie negativer x-Werte.

Interessant ist jedoch für uns die Schwankung um diesen Mittelwert. Um sie zu erhalten quadratieren wir die Gl. (II, 89):

$$(x - x_0)^2 = s_1^2 \cos^2 \vartheta_1 + s_2^2 \cos^2 \vartheta_2 \dots + s_1 \cos \vartheta_1 (s_2 \cos \vartheta_2 + s_3 \cos \vartheta_3 \dots) \dots \tag{II, 90}$$

Bilden wir darüber den Mittelwert, so verschwinden alle gemischten Produkte auf der rechten Seite der Gl. (II, 90) und es bleibt übrig:

$$\overline{(x_m - x_0)^2} = \overline{\sum_{\nu=1}^{m} s_\nu^2 \cos^2 \vartheta_\nu} \,.$$

Die Mittelung über die voneinander unabhängigen Größen s_ν^2 und $\cos^2 \vartheta_\nu$ kann getrennt vorgenommen werden. Die Mittelung über das Quadrat des Neutronenweges zwischen je zwei Zusammenstößen ergibt hier:

$$\overline{s^2} = \frac{\int_0^\infty s^2 e^{-\frac{s}{\lambda_s}} ds}{\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\lambda_s}} ds} = 2 \lambda_s^2 \,. \tag{II, 91}$$

Der $\cos^2 \vartheta$ muß über den Raumwinkel gemittelt werden:

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{\int_0^\pi \cos^2 \vartheta \, d\Omega}{\int_0^\pi d\Omega} = \frac{\int_0^\pi \cos^2 \vartheta \cdot 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta}{\int_0^\pi 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta} = \frac{1}{3} \,. \tag{II, 92}$$

Wir erhalten damit für das mittlere Verschiebungsquadrat in der x-Richtung:

$$\overline{(x_m - x_0)^2} = m \frac{2}{3} \lambda_s^2 . \tag{II, 93}$$

Ist t_0 die Zeit, die im Mittel zwischen zwei Zusammenstößen eines Neutrons liegt, so ist $m = \frac{t}{t_0}$, wenn t die Zeit vom Start des Neutrons bis zum m-ten Stoß ist. Damit wird aus der Gl. (II, 93), wenn man noch die mittlere Neutronengeschwindigkeit $\bar{v}$ einführt:

$$\overline{(x - x_0)^2} = \frac{2}{3} v \lambda_s t . \tag{II, 94}$$

Wieder sehen wir, wie beim Fermialter, daß bei diesem Vorgang statistischer Gesetzmäßigkeit das mittlere Wegquadrat mit der Zeit wächst, nicht der mittlere Weg selber, der bleibt gleich Null.

Nachdem wir durch die Mittelung über den $\cos^2\vartheta$ das Problem auf eine Dimension, die x-Richtung, beschränkt haben, können wir das Diffusionsproblem auch so beschreiben, als hätte das Neutron von vornherein nur die Möglichkeit gehabt, auf der x-Achse hin und herzulaufen, den anderen Richtungsfreiheitsgraden haben wir durch den Faktor $\frac{2}{3}$ Rechnung getragen. Die mittlere freie Weglänge in der x-Richtung wäre dann $\lambda_x = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\lambda_s$.

Einen derartigen eindimensionalen Diffusionsvorgang können wir noch auf eine andere Weise beschreiben:

Wir nehmen an, das Neutron habe wieder m Stöße an Atomkernen gemacht, indem es bei $x = x_0$ anfing und jeweils einen Schritt nach rechts oder einen nach links ausgeführt hat, aber ganz unregelmäßig. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es unter m Schritten z. B. k Schritte mehr nach rechts als nach links getan hat, ist

(II, 95) $$W(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \binom{m}{\frac{m}{2}+k},$$

denn $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die m Schritte nach rechts oder links in einer ganz bestimmten Reihenfolge getan werden, während $\binom{m}{\frac{m}{2}+k}$ die Anzahl der Möglichkeiten ist, die $\frac{m}{2}+k$ der Schritte nach rechts mit solchen nach links zu vertauschen.

Eine in der Statistik häufig verwendete Näherungsformel lautet:

(II, 96) $$W(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \binom{m}{\frac{m}{2}+k} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\cdot m}}\, e^{-\frac{2k^2}{m}},$$

wobei die Zahl m nicht zu klein sein soll.

Für m setzen wir wieder wie oben $m = \frac{\bar{v}}{\lambda_s}\,t$ ein. $x - x_0$ ist jetzt der vom Neutron auf der x-Achse nach rechts zurückgelegte Weg, d. h. mit der obigen Definition von λ_x: $x - x_0 = 2k\,\lambda_x = 2k\sqrt{\frac{2}{3}}\,\lambda_s$.

Die Wahrscheinlichkeit, das Neutron zwischen den Orten $x - x_0$ und $x + dx - x_0$ anzutreffen, ist demnach:

$$W(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi \bar{v} \lambda_s t}}\, e^{-\frac{3}{4\bar{v}\lambda_s t}(x-x_0)^2}\, dx.$$

Nehmen wir nun an, daß wir unser Experiment nicht mit einem, sondern mit vielen Neutronen gemacht haben, so können wir von der Wahrscheinlichkeit auf die Neutronendichte $n(x, t)$ übergehen, die der Wahrscheinlichkeit $W(x)$ proportional sein muß:

(II, 97)
$$n(x, t)\,dx = \frac{n_0\,dx_0}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi \bar{v} \lambda_s t}}\, e^{-\frac{3}{4\bar{v}\lambda_s t}(x-x_0)^2}\, dx.$$

Darin ist $n_0 dx_0$ die Anzahl der Neutronen, die zur Zeit $t = 0$ an der Stelle x_0 in einem Volumenelement von 1 cm² Grundfläche und einer Breite dx_0 enthalten waren, d. h. $n_0 dx_0 = n(x_0, 0)\,dx_0$. Nun sollen aber zur Zeit $t = 0$ nicht nur an der Stelle $x = x_0$ Neutronen vorhanden gewesen sein, sondern an allen Stellen. Von jeder solchen Stelle x_0 aus diffundieren sie in der Folgezeit nach beiden Seiten fort. Die Anteile der aus allen Volumenelementen dx_0 bei den x_0 stammenden Neutronen, die durch Diffusion in ein anderes Volumenelement dx bei x gelangt sind, addieren sich dann. Wir gewinnen demnach die Neutronenzahl innerhalb dx durch Integration aller über x_0 verteilten Quellen:

(II, 98)
$$n(x, t)\,dx = \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi \bar{v} \lambda_s t}} \int_{-\infty}^{+\infty} n(x_0)\, e^{-\frac{3}{4\bar{v}\lambda_s t}(x-x_0)^2}\, dx_0.$$

Durch zweimalige partielle Differentiation nach x und einmalige nach t erhalten wir die Differentialgleichung, die den eindimensionalen Diffusionsvorgang beschreibt:

(II, 99)
$$\frac{\lambda_s}{3}\bar{v}\,\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial n}{\partial t},$$

und da wir mit monoenergetischen Neutronen rechnen, können wir das $\bar{v}$ unter den Differentialquotienten ziehen, so daß wir mit $n\bar{v} = \Phi$ und

(II, 100)
$$\frac{\lambda_s}{3} = D,$$

die uns geläufige Diffusionsgleichung für monoergetische Neutronen erhalten:

$$D\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial n}{\partial t}.$$

Natürlich läßt sich die Rechnung auch auf den dreidimensionalen Fall erweitern:

(II, 101) $$D \cdot \Delta \Phi = \frac{\partial n}{\partial t} .$$

7. Die mittlere Transportweglänge

Bei der Ableitung der Diffusionskonstanten D hatten wir angenommen, daß die streuenden Atomkerne durch die Neutronenstöße nicht in Bewegung versetzt werden. In Wirklichkeit trifft das nur für sehr schwere Kerne zu. Die meisten Stöße aber machen die Neutronen im Reaktor mit Moderatorkernen, die ja so leicht wie möglich sein sollen. In diesem Falle übernimmt, wie wir im Abschnitt II, 3 gesehen haben, der Moderatorkern einen Teil des Impulses, den das Neutron mitbrachte. Die Folge davon ist, daß das Neutron zwischen zwei Zusammenstößen scheinbar einen etwas größeren mittleren Weg zurücklegt als die mittlere freie Weglänge λ_s, indem es den Moderatorkern bei jedem Stoß gewissermaßen ein Stück mit sich fortnimmt.

Wir hatten im Abschnitt II, 3 die beiden Streuwinkel ψ und ϑ kennengelernt. ψ war der Streuwinkel im Laborsystem, in dem also der Moderatorkern vor dem Stoß als ruhend gedacht war, ϑ war der Streuwinkel im Schwerpunktsystem, in dem der Schwerpunkt ruhte. Die Streuung im Schwerpunktsystem war isotrop, d.h. die Streuwinkelverteilung war gleichmäßig über den ganzen Raumwinkelbereich, also unabhängig vom Streuwinkel ϑ selber. Im Laborsystem ist das nicht der Fall, wie aus der Gl. (II, 44) hervorgeht, die die Beziehung zwischen ψ und ϑ enthält; denn mitteln wir den cos ψ über den ganzen Raumwinkel Ω:

(II, 102) $$\overline{\cos \psi} = \frac{\int\limits_0^\pi \frac{1 + A \cos \vartheta}{\sqrt{1 + A^2 + 2A \cos \vartheta}} \cdot 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta}{\int\limits_0^\pi 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta} = \frac{2}{3A} ,$$

so erhalten wir einen positiven Wert. Der mittlere Streuwinkel im Laborsystem ist also nicht, wie der mittlere Cosinus des Streuwinkels ϑ im Schwerpunktsystem gleich null, sondern es findet eine Vorwärtsstreuung statt, die um so größer wird, je kleiner die

Massenzahl des Moderatorkerns ist. Für sehr schwere Moderatorkerne geht ja das Schwerpunktsystem in das Laborsystem über und der mittlere Cosinus des Streuwinkels $\overline{\cos\psi}$ verschwindet.

Es soll nun an Hand der Abb. II, 11 die scheinbare Verlängerung der mittleren freien Weglänge näherungsweise berechnet werden, indem wir diese Verlängerung bei einem Stoß ausrechnen.

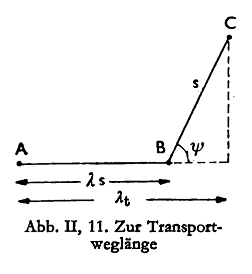


Abb. II, 11. Zur Transportweglänge

Das Neutron fliege in der x-Richtung von einem Moderatorkern A zu einem im Abstand λ_s befindlichen zweiten Kern B. Dort wird es gestreut und zwar unter dem Winkel ψ, dessen gemittelter Cosinus in der Gl. (II, 102) angegeben ist. Unter dem Winkel ψ fliegt es also weiter, bis es im Abstand λ_s einen Kern C trifft, an dem es wieder unter der gleichen Vorwärtsstreuung abgelenkt wird. Die scheinbare Verlängerung von λ_s beträgt also mit den in der Abb. II, 11 gegebenen Bezeichnungen:

$$\lambda_t - \lambda_s = \lambda_t \overline{\cos\psi}$$

so daß

$$\lambda_t = \frac{\lambda_s}{1 - \overline{\cos\psi}} = \frac{\lambda_s}{1 - \frac{2}{3A}} \tag{II, 103}$$

ist. λ_t nennt man die mittlere Transportweglänge. Sie hat im allgemeinen dort, wo es sich um die Streuung von Neutronen an leichteren Atomkernen handelt, an die Stelle der mittleren Streuweglänge zu treten.

8. Die Vierfaktorenformel für den homogenen Reaktor

Im Abschnitt I, 3 wurde der Neutronenzyklus, die Lebensgeschichte der Neutronen im Reaktor vom Augenblick ihrer Entstehung als Spaltungsneutronen an bis zu ihrer Absorption durch einen spaltbaren Kern und der dadurch bewirkten Neuentstehung von weiteren Spaltungsneutronen bereits qualitativ beschrieben. In diesem Abschnitt soll der Neutronenzyklus mit Hilfe der sogenannten Vierfaktorenformel auch quantitativ behandelt werden.

Diese Theorie dient der Vervollständigung der Diffusionsgleichung für die thermischen Neutronen, in der uns ja noch der Quellterm q_{th} der thermischen Neutronen fehlt.
Wir gehen bei der Berechnung der Größe q_{th} so vor, daß wir den ganzen Neutronenzyklus in einzelne Abschnitte aufteilen und für jeden Abschnitt die Bilanz ziehen d.h. feststellen, wieviele der

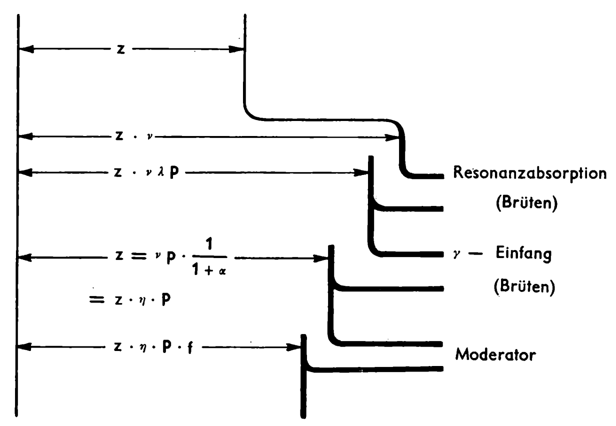


Abb. II, 12. Der Neutronenzyklus im homogenen unendlich ausgedehnten Reaktor. Beim heterogenen Reaktor ist die Figur durch die Berücksichtigung des ε-Faktors und beim Reaktor endlicher Ausdehnung durch die des Ausflusses schneller und thermischer Neutronen zu ergänzen

Neutronen, die in diesen Abschnitt hineinkamen, ihn auch verlassen, und wieviele beim Durchlaufen des Abschnittes verlorengehen.
Wir wollen den Neutronenzyklus an Hand eines Bildes Abb. II, 12 verfolgen. Allerdings idealisieren wir den Reaktor jetzt wieder, indem wir annehmen, daß keine Neutronen, weder im Abbrems- noch im thermischen Bereich, ausfließen. Wir betrachten also einen unendlich großen Reaktor.
Die Abb. II, 12 zeigt die Lebensgeschichte der z Neutronen, mit denen wir den Zyklus begonnen hatten. Sie ist so gemeint, daß die Neutronen von oben nach unten fließen sollen, während nach rechts immer diejenigen von ihnen abgezweigt werden, die verloren gehen. Die Menge der fließenden Neutronen ist jeweils durch die Breite des Stromes und die Länge der horizontalen Doppelpfeile gekennzeichnet.

Die Beschreibung des Neutronenkreislaufes beginnen wir in dem Augenblick der Uranspaltung:
Es mögen z thermische Neutronen z Urankerne spalten. Bei jeder dieser Spaltungen gewinnen wir, wie es im Anfang geschildert wurde, einige neue Neutronen als Spaltungsneutronen. Bei Uran-235 sind es durchschnittlich $\nu_{235} = 2{,}47$, beim Uran-233 $\nu_{233} = 2{,}55$ Neutronen. Durch die z Spaltungen erhalten wir also $z \cdot \nu$ neue Spaltungsneutronen.

a) Die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit (p-Faktor)

Die Neutronen, die durchschnittlich bei jeder Spaltung als schnelle Neutronen entstehen, wandern umher und stoßen dabei häufig mit den Atomkernen, besonders mit den Moderatorkernen, zusammen. Dabei geben sie allmählich ihre Energie ab, bis sie thermisch geworden sind, d.h. bis sie ihre Bewegungsenergie der der Atome im Reaktor angeglichen haben.
Nun hatten wir sowohl in der Bremstheorie als auch in der Diffusionstheorie der schnellen Neutronen immer angenommen, daß während des Abbremsprozesses durch Absorption im Reaktorinnern keine Neutronen verloren gehen. Wir schwächen diese Bedingung jetzt dahingehend ein wenig ab, daß zwar im wesentlichen die Bremsdichte q unabhängig sein soll von der Neutronenenergie, daß aber doch in bestimmten schmalen Energiebereichen eine schwache Absorption stattfindet. Diese schmalen Energiebereiche sind die Resonanzspitzen, die wir in der Abb. I, 5 kennenlernten. Erreicht ein Neutron während seiner Abbremsung die Energie, bei der ein Atomkern zum Resonanzeinfang bereit ist, und befindet es sich dann gerade in der Nähe dieses Kerns, so besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß es absobiert wird.
Da es im allgemeinen mehrere Resonanzspitzen im Bereich oberhalb der thermischen Energie gibt, kommen die Neutronen, während sie diesen Energiebereich durchlaufen, mehrfach in Gefahr, absorbiert zu werden. Unser Ziel ist nun, auszurechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein Neutron während des Abbremsprozesses der Gefahr eines Resonanzeinfanges entkommt.
Wir betrachten ein schmales Energieintervall dE, in dem bei der Energie E eine schmale Resonanzspitze liegt. Die Anzahl der

Stöße, die das Neutron machen muß, um den Energiebereich dE zu durchlaufen, ist nach der Gl. (II, 51) $\frac{dE/E}{\xi}$: Innerhalb des Energieintervalls dE kann es entweder an einem Kern — vorzugsweise einem Moderatorkern — gestreut oder durch die Resonanzspitze — z.B. eines Uran-238-Kerns — eingefangen werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das letztere von beiden geschieht, ist $\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)}$. Darin sind jetzt $\Sigma_a(E)$ der makroskopische Absorptionsquerschnitt, etwa des Urans-238 bei der Energie E im Bereich dE[1] und Σ_s der makroskopische Streuquerschnitt (des Moderators und auch des Urans). Die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron im Energiebereich dE absorbiert wird, ist:

$$\frac{1}{\xi}\frac{dE}{E}\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)}.$$

Die Anzahl dq der Neutronen, die im Energieintervall dE absorbiert werden, ist gleich der Anzahl q der Neutronen, die die obere Grenze von dE erreicht haben, multipliziert mit der eben berechneten Wahrscheinlichkeit.

Es ist also:

(II, 104) $$dq = -q\frac{1}{\xi}\frac{dE}{E}\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)}.$$

Das Minuszeichen besagt, daß die Anzahl der noch nicht absorbierten Neutronen ständig geringer wird, je mehr man den Energiebereich im positiven Sinne vergrößert. Integriert man nun die Gl. (II, 104) von der thermischen Energie an aufwärts über den ganzen Energiebereich, in dem Resonanzspitzen vorkommen, so erhält man für die Anzahl der Neutronen, die dem Resonanzeinfang entkommen und thermisch werden:

(II, 106) $$q_{th} = q_{sp}\, e^{-\frac{1}{\xi}\int\limits_{E_{th}}^{E_{sp}}\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)}\frac{dE}{E}}.$$

---

[1] Es ist zu beachten, daß diese Wirkungsquerschnitte stark von der Energie abhängen. Sie sind nicht zu verwechseln mit den thermischen Wirkungsquerschnitten. Zur Kennzeichnung des Unterschiedes werden die Wirkungsquerschnitte im Resonanzbereich als Funktionen der Energie beschrieben.

q_{sp} ist die Anzahl der je sec und je cm³ entstehenden Spaltungsneutronen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron während des Abbremsprozesses einem Resonanzeinfang entkommt, ist demnach:

$$p = \frac{q_{th}}{q_{sp}} = e^{-\frac{1}{\xi} \int\limits_{E_{th}}^{E_{sp}} \frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E) + \Sigma_s(E)} \frac{dE}{E}} .$$

Häufig sieht man auch die Gl. (II, 107) in einer etwas anderen Form geschrieben:

(II, 107)
$$p = e^{-\frac{N_u}{\xi \Sigma_s} \int\limits_{E_{th}}^{E_{sp}} (\sigma_{au}(E))_{\mathrm{eff}} \frac{dE}{E}} .$$

Darin ist N_u die Anzahl der Uranatome im cm³, die am Resonanzeinfang beteiligt sind, also etwa der Uran-238-Atome. $(\sigma_{au}(E))_{\mathrm{eff}}$ ist der sogenannte effektive Absorptionsquerschnitt

(II, 108)
$$(\sigma_{au}(E))_{\mathrm{eff}} = \frac{\Sigma_s(E)}{\Sigma_a(E) + \Sigma_s(E)} \sigma_{au}(E)$$

$\sigma_{au}(E)$ ist dann der wirkliche mikroskopische Absorptionsquerschnitt, und $\frac{\Sigma_s(E)}{\Sigma_a(E) + \Sigma_s(E)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron gestreut und nicht absorbiert wird. Das Integral $\int (\sigma_{au}(E))_{\mathrm{eff}} \frac{dE}{E}$ heißt „das effektive Resonanzintegral“. Das effektive Resonanzintegral findet man häufig in der Form von Tabellen oder Kurven dargestellt. Es ist im wesentlichen abhängig von dem Quotienten Σ_s/N_u, dem Streuquerschnitt je Uran-Atom. Die Abb. II, 13 gibt das effektive Resonanzintegral in Abhängigkeit des Streuquerschnittes je Uranatom für Uran-238 und für Thorium-232 an.

Da, abgesehen vom ξ, der ganze Exponent in der Gl. (II, 107) im wesentlichen nur vom Streuquerschnitt je Brennstoffatom $\Sigma_s/N_u = \sigma_s N_s/N_u$ abhängt, ist auch der p-Faktor außer von den Atomkonstanten nur von dem Verhältnis $N_s/N_u = m$, dem sogenannten Moderatorverhältnis, abhängig, und zwar wird, je größer das Zahlenverhältnis von Moderator- zu Urankernen im Reaktor ist, auch der p-Faktor um so größer.

Die hier gegebene Ableitung des p-Faktors gilt streng genommen nur für den Fall schwacher Absorption, d.h. entweder für kleine Absorptionsquerschnitte im Resonanzbereich oder sehr schmale Resonanzspitzen. Außerdem sollen die Resonanzspitzen aus den im Abschnitt II, 4 angedeuteten Gründen nicht zu dicht neben-

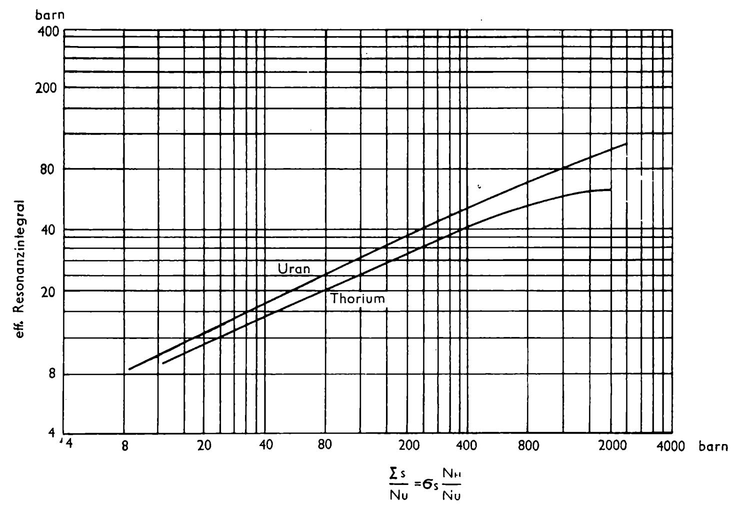


Abb. II, 13. Das effektive Resonanzintegral für Uran-238 und Thorium-232

einanderliegen. Daß unsere Formeln für starke Resonanzabsorption nicht gilt, liegt daran, daß dann der Quotient $\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E) + \Sigma_s(E)}$ nicht mehr gleich der Wahrscheinlichkeit für die Absorption eines Neutrons gesetzt werden kann.

Durch den Resonanzeinfang werden nun die $z \cdot v$ Neutronen in der Abb. II, 12 auf $z \cdot v \cdot p$ Neutronen vermindert. Die Anzahl $z \cdot v \cdot (1-p)$ Neutronen, die nach rechts abzweigen, dienen im wesentlichen der Plutonium bzw. der Uran-233-Produktion, zum geringeren Teil werden sie nutzlos eingefangen. $z \cdot v \cdot p$ Neutronen werden also thermisch.

b) Der f-Faktor

Die thermischen Neutronen bewegen sich mit durchschnittlich gleicher Geschwindigkeit in dem Gemisch von Brennstoff- und

Moderatorkernen so lange, bis sie von Atomkernen absorbiert werden. Die weitaus meisten werden natürlich von den Brennstoffkernen eingefangen, aber ein gewisser Anteil wird doch auch im Moderatormaterial, vorwiegend durch darin enthaltene Verunreinigungen, absorbiert. Der letztere Anteil soll natürlich so klein wie möglich sein; denn man möchte ja möglichst viele Neutronen für die Uranspaltung nutzbar machen.

Ist Σ_u der thermische makroskopische Absorptionsquerschnitt des gesamten Brennstoffes und Σ_m der des Moderators, so ist das Verhältnis der im Brennstoff zu den im Brennstoff und im Moderator je cm³ und je sec absorbierten Neutronen

$$f = \frac{\Sigma_u \Phi}{\Sigma_u \Phi + \Sigma_m \Phi}$$

oder nach Division durch Φ

$$f = \frac{\Sigma_u}{\Sigma_u + \Sigma_m}\,. \tag{II, 109}$$

Die durch die Gl. (II, 109) gegebene Größe heißt der „f-Faktor" oder auch der „Nutzungsfaktor der thermischen Neutronen". Die letztere Bezeichnung geht darauf zurück, daß die Größe f von allen Neutronen, die thermisch werden, den Anteil angibt, der im Brennstoff absorbiert wird; denn im unendlich großen Reaktor werden alle thermischen Neutronen entweder im Brennstoff oder im Moderator absorbiert, so daß der Nenner der Gl. II, 109 (mit Φ multipliziert) die Anzahl der je sec und je cm³ thermisch werdenden, wie auch die der im Brennstoff und im Moderator absorbierten Neutronen darstellt.

Von den thermisch gewordenen $z \cdot \nu \cdot p$ Neutronen bleibt also jetzt der Bruchteil $z \cdot \nu \cdot p \cdot f$ übrig und wird im Brennstoff absorbiert.

c) Der η-Faktor

Die $z \cdot \nu \cdot p \cdot f$ im Brennstoff absorbierten thermischen Neutronen führen nicht alle zu neuen Uranspaltungen. Ein kleiner Teil von ihnen geht auch dort verloren, indem er entweder völlig nutzlos eingefangen wird, oder auch, wenn Uran-238 oder Thorium-232 vorhanden ist, zum Brüten dient.

Definiert man entsprechend den übrigen makroskopischen Absorptionsquerschnitten einen makroskopischen Spaltungsquerschnitt Σ_{sp}, so wird von den $z \cdot \nu \cdot p \cdot f$ in den Brennstoff eindringenden Neutronen der Anteil

(II, 110) $$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{\Sigma_{sp}}{\Sigma_{sp} + \Sigma_\gamma} = \frac{\Sigma_{sp}}{\Sigma_u} \qquad \text{mit } \alpha = \frac{\Sigma_\gamma}{\Sigma_{sp}}$$

zur Spaltung und damit zur Neuproduktion von Spaltungsneutronen führen. Σ_γ ist der Absorptionsquerschnitt für die Neutronen, die im Brennstoff absorbiert werden und nicht zur Spaltung führen.

Die beiden Faktoren $\frac{1}{1+\alpha}$ und ν pflegt man in der Reaktortechnik zu einem Faktor η zusammenzuziehen:

(II, 111) $$\eta = \frac{1}{1+\alpha}\,\nu = \nu\,\frac{\Sigma_{sp}}{\Sigma_{sp} + \Sigma_\gamma}\,.$$

Das geschieht, um die einzelnen Faktoren nach ihrem Wirkungsbereich zu ordnen. So betreffen ε[1] und p die schnellen Neutronen und den Abbremsbereich, f und η die thermischen Neutronen, darunter wieder f den Moderator und η den Brennstoff.

Häufig wird auch der η-Faktor noch nach den einzelnen Komponenten, aus denen der Brennstoff zusammengesetzt ist, aufgespalten.

d) Der ε-Faktor

Der ε-Faktor spielt nur in der Theorie der heterogenen Reaktoren eine Rolle und soll deshalb auch in dem Abschnitt IV über den heterogenen Reaktor besprochen werden. Hier wird er nur der Vollständigkeit halber erwähnt, weil man ihn üblicherweise mit den anderen drei Faktoren η, f und p zusammennimmt. In homogenen Reaktoren ist $\varepsilon = 1$.

Der ε-Faktor trägt der Spaltung durch schnelle Neutronen Rechnung. Die weitaus meisten Uranspaltungen werden ja durch thermische Neutronen bewirkt. Den Vermehrungsfaktor für diese

---

[1] Der ε-Faktor wird im nächsten Abschnitt erklärt.

Art der Spaltung hatten wir ν genannt. Ein kleiner Teil von Urankernen wird aber auch durch sehr schnelle Neutronen gespalten. Der dem entsprechende Vermehrungsfaktor ist ε.

e) Der Multiplikationsfaktor k_∞

Nun ist der Zyklus geschlossen, denn in der Zahl $z \cdot \varepsilon \cdot p \cdot \eta \cdot f$ haben wir die Anzahl der Neutronen, die je Uranspaltung wieder zu neuen Spaltungen führen, gewonnen. Fassen wir die vier Faktoren $\varepsilon \cdot p \cdot \eta \cdot f$ zusammen zu einem, so erhalten wir in

(II, 112) $$k_\infty = \varepsilon \cdot \eta \cdot p \cdot f$$

ein Maß dafür, wieviele Neutronen wir bei jeder Uranspaltung gewinnen. Oder anders gesagt: Aus der Gl.(II, 112) können wir entnehmen, wieviele Neutronen pro Spaltung wir für andere Dinge als für die Aufrechterhaltung der Kettenreaktion verwenden dürfen. Nehmen wir z.B. an, wir betreiben einen Reaktor mit einem Gemisch von Uran-235 und Uran-238 mit Graphit als Moderator. Für ein bestimmtes Mischungsverhältnis erhalten wir z.B. die folgenden Werte: $\eta = 1{,}9$; $p = 0{,}7$; $f = 0{,}84$; $\varepsilon = 1$. Daraus ergibt sich $k_\infty = 1{,}11$. Von diesen 1,11 Neutronen, die nach einer Spaltung übrigbleiben, wird eines wieder für eine neue Spaltung verbraucht, um die Kettenreaktion weiterlaufen zu lassen. 0,11 Neutronen bleiben zu unserer Verfügung. Jedoch müssen wir bedenken, daß die Gl. (II, 112) nur für einen unendlich großen Reaktor die Neutronenbilanz richtig beschreibt. Es ist also noch nicht berücksichtigt worden, daß ein Teil der Neutronen durch die Wände des Reaktors ausfließt. In einem wirklichen Reaktor behalten wir also nicht 0,11 Neutronen je Spaltung übrig, sondern weniger.

9. Die Diffusionsgleichung

Wir wenden uns nun noch einmal der Diffusionsgleichung für die thermischen Neutronen Gl. (II, 26) zu, um das eben Beschriebene darauf anzuwenden. Das Quellglied hatten wir in der Gl. (II, 26) in der Form q_{th} geschrieben und lediglich im Abschnitt II, 2 erwähnt, daß der Quellterm q_{th} dem thermischen Neutronenfluß Φ proportional ist. Wir sind jetzt in der Lage, den Proportionalitätsfaktor anzugeben.

Wir betrachten einen Kubikzentimeter im Inneren des Reaktorcores. Je sec werden in diesem Kubikzentimeter $\Sigma_a \Phi$ thermische Neutronen absorbiert, wenn Σ_a der makroskopische Aksorptionsquerschnitt für thermische Neutronen und Φ der thermische Fluß ist. Zum Absorptionsquerschnitt Σ_a tragen jetzt alle in dem betrachteten Kubikzentimeter enthaltenen Atome, also sowohl Brennstoff- als auch Moderatorkerne, bei.

Von diesen $\Sigma_a \Phi$ Neutronen wird jedoch nur der Anteil $f \cdot \Sigma_a \Phi$ im Brennstoff absorbiert, der Anteil $(1-f)\Sigma_a \Phi$ im Moderator. Von den $f \Sigma_a \Phi$ Neutronen führt wieder nur der Anteil $\frac{1}{1+\alpha} \cdot f \cdot \Sigma_a \Phi$ zu Uranspaltungen und erzeugt dadurch $\frac{\nu}{1+\alpha} \cdot f \cdot \Sigma_a \Phi = \eta \cdot f \cdot \Sigma_a \Phi$ Spaltungsneutronen. Die Lebensgeschichte der Neutronen im Abbremsbereich vom Augenblick ihrer Entstehung an bis zum Thermischwerden haben wir ausführlich beschrieben. Ein Teil von ihnen fließt während des Abbremsens aus dem Reaktor fort. Der übrigbleibende Anteil ist $P_s = e^{-B^2 \tau}$, worin B der Krümmungsfaktor, von dem im nächsten Abschnitt noch die Rede sein wird, und τ das Fermialter der thermischen Neutronen ist. Aber auch nicht alle Neutronen, die während des Abbremsens im Reaktor bleiben, erreichen die thermische Energieschwelle, sondern nur der Bruchteil p. Die übrigen werden in Resonanzspitzen eingefangen. Schließlich werden also von den ursprünglich absorbierten $\Sigma_a \Phi$ thermischen Neutronen $e^{-B^2 \tau} p \eta f \Sigma_a \Phi$ Neutronen wieder thermisch. Rechnen wir mit einem heterogenen Reaktor, so müssen wir noch die durch schnelle Neutronen bewirkte Spaltung in dem Faktor ε berücksichtigen. Die vier Faktoren $\varepsilon p \eta f$ fassen wir wieder in dem Vermehrungsfaktor k_∞ zusammen und erhalten:

(II, 113) $q_{th} = \Sigma_a e^{-B^2 \tau} k_\infty \Phi$: Anzahl der je cm³ und je sec neu entstehenden thermischen Neutronen.

Die Diffusionsgleichung für die thermischen Neutronen lautet also jetzt:

$$D \Delta \Phi - \Sigma_a \Phi + k_\infty \Sigma_a e^{-B^2 \tau} \Phi = \frac{\partial n}{\partial t} \text{ bzw. } = 0\,, \qquad \text{(II, 114)}$$

wobei wir jetzt unter τ stets das Fermialter der thermisch werdenden Neutronen verstehen wollen. Wir erkennen, daß diese

Diffusionsgleichung für thermische Neutronen grundsätzlich von ähnlicher Art ist wie die Gl. (II, 81), die wir für die Neutronen im schnellen Bereich abgeleitet hatten, denn wenn wir die Gl. (II, 114) für den stationären Fall ein wenig umschreiben, so erhalten wir

$$\text{(II, 115)} \qquad \Delta\Phi + [k_\infty e^{-B^2\tau} - 1]\,\frac{\Sigma_a}{D}\,\Phi = 0\,.$$

An der Stelle der allein ortsabhängigen Funktion $R(\mathfrak{r})$ in der Gl. (II, 82) steht hier die ebenfalls nur ortsabhängige Funktion $\Phi(\mathfrak{r})$. Der Konstanten B^2 in der Gl. (II, 84) entspricht hier die Konstante $[k_\infty e^{-B^2\tau} - 1]\,\frac{\Sigma_a}{D}$. Tatsächlich sind diese beiden Konstanten einander gleich, d. h. es ist

$$\text{(II, 116)} \qquad B^2 = \frac{\Sigma_a}{D}\,[k_\infty e^{-B^2\tau} - 1]\,.$$

Das liegt daran, daß die beiden Gln. (II, 81) und (II, 114) nicht nur von der gleichen Art sind, sondern auch die gleichen Randbedingungen haben. Es wurde ja schon gesagt, daß die Konstante B^2 in der Gl. (II, 84) nur von der Form und der Größe des Reaktors abhängt. Das gleiche gilt auch für die Konstante $[k_\infty e^{-B^2\tau} - 1]\,\frac{\Sigma_a}{D}$. Fordert man nun, daß die Bremsdichte $q(\mathfrak{r}, \tau)$ und damit auch $R(\mathfrak{r})$ an den Seitenwänden des Reaktors verschwindet und ebenso auch der Neutronenfluß $\Phi(\mathfrak{r}, t)$ der Gl. (I, 114), so folgt daraus die Gleichheit der Konstanten B^2 in der Gl. (II, 81) und der Konstanten $[k_\infty e^{-B^2\tau} - 1]\,\frac{\Sigma_a}{D}$ in der Gl. (II, 115). Die Gl. (II, 114) können wir wegen der Gültigkeit der Gl. (II, 116) jetzt auch in der Form

$$\text{(II, 117)} \qquad \Delta\Phi + B^2\Phi = \frac{1}{D}\frac{\partial n}{\partial t} \text{ bzw.} = 0$$

schreiben, wobei wir aber im folgenden immer nur den stationären Fall mit $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ betrachten wollen. Da wir bei der Besprechung der Diffusionsgleichung im Abschn. II, 2 den Summanden $\Delta\Phi$ als den für den Neutronenausfluß aus dem Reaktor verantwortlichen Teil der Gleichung kennengelernt haben, kennzeichnet jetzt auch nach der Gl. (II, 117) die Größe $-B^2\Phi$ diesen Neutronenausfluß. Andererseits ist aber im stationären Falle $D B^2\Phi = \Sigma_a [k_\infty e^{-B^2\tau} - 1]\Phi$

auch die Anzahl der je cm³ und je sec im Reaktor neuentstehenden thermischen Neutronen abzüglich der absorbierten, also die Anzahl der je cm³ und je sec für den Ausfluß übrigbleibenden Neutronen. Die Gl. (II, 115) besagt also nichts weiter, als daß bei stationärem Betrieb des Reaktors die Anzahl der je Zeiteinheit ausfließenden thermischen Neutronen gleich ist der Anzahl der neuentstehenden, vermindert um die Anzahl der absorbierten thermischen Neutronen.

Wir wollen noch die Gl. (II, 116) etwas anders schreiben, indem wir zwei neue Begriffe einführen. Zunächst setzen wir $\frac{D}{\Sigma_a} = L^2$. Die Größe L heißt die „Diffusionslänge" der thermischen Neutronen. Die zweite Größe, die wir jetzt kennenlernen, ist der „effektive Vermehrungsfaktor k_{eff}":

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_\infty \, e^{-B^2\tau}}{1 + L^2 B^2} \; (= 1_{\text{stat}}). \qquad \text{(II, 118)}$$

Der effektive Vermehrungsfaktor spielt für den begrenzten Reaktor die gleiche Rolle wie der Vermehrungsfaktor k_∞ für den unbegrenzten.

Das heißt, so wie der unbegrenzte Reaktor gerade dann stätionär läuft, wenn $k_\infty = 1$ ist, weil dann die Produktion der Neutronen genau gleich ist der Absorption, so muß auch der effektive Vermehrungsfaktor im begrenzten Reaktor $k_{\text{eff}} = 1$ sein, wenn der Reaktor stationär laufen soll. Für diesen Fall ist die Gl. (II, 118) mit der Gl. (II, 116) identisch. Da im stationären Betrieb stets $k_{\text{eff}} = 1$ ist, entsteht die Frage, warum wir überhaupt eine neue Bezeichnung für eine Größe einführen, die ohnehin gleich eins ist. Sie kann erst beantwortet werden, wenn wir das nichtstationäre Verhalten von Reaktoren behandeln. Im nichtstationären Falle kann nämlich k_{eff} etwas verschieden sein von eins. Man nennt die relative Abweichung $\frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} = \delta$ die Reaktivität. Wir haben in der Gl. (II, 118) $k_{\text{eff}} = (1)_{\text{stat}}$ gesetzt, was bedeuten soll, daß diese Bedingung nur gilt, wenn der Reaktor stationär läuft. In dem Falle heißt die Gl. (II, 118) die „kritische Bedingung" des Reaktors, und man nennt einen Reaktor kritisch, wenn die Gl. (II, 118) oder was das gleiche ist, die Gl. (II, 116) erfüllt ist.

Sehr häufig ist der Exponent B^2 in der Gl. (II, 118) so klein, daß man mit guter Näherung $e^{-B^2\tau}$ durch $1 - B^2\tau$ ersetzen kann. Da auch das B^2L^2 im allgemeinen wesentlich kleiner ist als eins, kann man in diesen Fällen mit guter Näherung an Stelle der Gl. (II, 116) schreiben:

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_\infty}{1 + B^2 M^2}, \tag{II, 119}$$

worin wir wieder eine neue Größe $M^2 = L^2 + \tau$ eingeführt haben. M heißt die „Wanderungslänge“ der Neutronen.

Die Größe L^2 kann ganz ähnlich erklärt werden, wie wir es in der Gl. (II, 80) mit dem Fermialter τ getan haben. Der Unterschied besteht nur darin, daß es sich beim Fermialter um schnelle Neutronen mit veränderlicher Energie handelte, während wir es bei der Diffusionslänge $L = \frac{D}{\Sigma_a}$ mit thermischen Neutronen zu tun haben.

Wir gehen also ganz ähnlich vor wie bei der Ableitung der Gl. (II, 80), indem wir jetzt unser Modell für die Diffusion der Neutronen so wählen, daß wir an der Stelle $r = 0$ eine stetig Neutronen erzeugende Punktquelle thermischer Neutronen einsetzen, die dann in das umgebende unendlich ausgedehnte Medium hineindiffundieren. Jedoch soll hier im Unterschied zu dem Falle der schnellen Neutronen das Medium thermische Neutronen absorbieren. Wir wollen aber dabei unberücksichtigt lassen, daß durch die Absorption der Neutronen im Uran neue Neutronen erzeugt werden, also nur die Absorption der Neutronen betrachten, nicht die Entstehung. Eine solche Diffusion thermischer Neutronen wird durch die Gl. (II, 115) beschrieben, worin aber der Quelltherm $k_\infty e^{-B^2\tau}\Sigma_a\Phi$ gestrichen wird:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\Sigma_a}{D}\Phi = \frac{1}{L^2}\Phi.$$

Die Lösung der Gleichung ist in diesem Falle:

$$\Phi(r) = A\frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r},$$

worin wieder A eine Konstante ist. Die Mittelwertbildung für das Quadrat des Abstandes, den die Neutronen vom Einsatzpunkt

$r = 0$ aus erreichen, bis sie im Moderator absorbiert werden, geschieht wieder in der üblichen Weise:

$$\text{(II, 120)} \qquad \overline{r^2} = \frac{\int\limits_0^\infty r^2 \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r} 4\pi r^2 dr}{\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r} 4\pi r^2 dr} = 6L^2.$$

Die Größe L^2 ist also $^1/_6$ des mittleren Quadrates des Weges, den ein Neutron von dem Ort im Reaktor aus, an dem es thermisch geworden ist, zurücklegt, bis es absorbiert wird. Da nun das Fermialter für thermische Neutronen gleich $^1/_6$ des mittleren Quadrates der Strecke war, die die Neutronen während des Abbremsens vom Ort ihrer Entstehung als Spaltungsneutronen aus zurücklegen, bis sie thermisch werden, ist die Summe aus diesen beiden Größen $M^2 = L^2 + \tau$ oder besser noch die Wurzel daraus

$$M = \sqrt{L^2 + \tau}$$

ein Maß für den Weg, den die Neutronen vom Ort ihrer Entstehung als Spaltungsneutronen aus im Reaktor zurücklegen, bis sie absorbiert werden.

Die Wanderungslänge will man immer möglichst klein machen; denn wir sehen aus der Gl. (II, 119), daß das Glied M^2B^2, das jetzt den Ausfluß sowohl der schnellen als auch der langsamen Neutronen kennzeichnet, mit der Wanderungslänge ansteigt. Je größer das M^2 in der Gl. (II, 119) ist, desto größer muß auch das k_∞ sein, damit die kritische Bedingung $k_{\text{eff}} = 1$ erfüllt ist.

Der Krümmungsfaktor B

Der Wert B hängt von der Größe und Gestalt des Reaktorcores ab. Wir nennen B den „Krümmungsfaktor", weil, wie wir noch sehen werden, B ein Maß ist für die Krümmung der Neutronenflußfunktion $\Phi(\mathfrak{r})$ im Reaktorcore. Um den Krümmungsfaktor zu bestimmen, müssen wir die Gl. (II, 115) bzw. (II, 117) mit ihren Randbedingungen für die verschiedenen Reaktorformen lösen.

Zunächst lösen wir die Gl. (II, 117) (stationär) für den einfachsten Fall, einen quaderförmigen Reaktor.
Nach der Gl. (II, 25) wird zur Berechnung eines quaderförmigen Reaktors der Δ-Operator zweckmäßigerweise in der Form $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ geschrieben, und die Gl. (II, 117) lautet damit:

$$\text{(II, 121)} \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + B^2 \Phi = 0.$$

Macht man auch hier wieder, ähnlich wie bei der Behandlung der Gl. (II, 81), einen Produktansatz der Form

$$\text{(II, 122)} \qquad \Phi = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z),$$

worin $X(x)$ eine Funktion ist, die nur von x, $Y(y)$ eine solche, die nur von y, $Z(z)$ eine, die nur von z abhängt, so gewinnt man durch Einsetzen dieser Lösung in die Gl. (II, 121) und nach Dividieren durch $X \cdot Y \cdot Z$:

$$\text{(II, 123)} \qquad \frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = -B^2.$$

Da aber die X, Y, Z voneinander unabhängige Funktionen sind, müssen $\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}$; $\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2}$; und $\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2}$ konstante Größen sein, die wir $-k_x^2$, $-k_y^2$ und $-k_z^2$ nennen wollen, und zwar muß nach der Gl. (II, 123)

$$\text{(II, 124)} \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = B^2$$

sein.

Aus $\quad \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0; \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0; \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0$

folgt:

$$X = X_0 \cos k_x x; \quad Y = Y_0 \cos k_y y; \quad Z = Z_0 \cos k_z z$$

und daraus nach der Gl. (II, 122)

$$\text{(II, 125)} \qquad \Phi = \Phi_0 \cos k_x x \cos k_y y \cos k_z z.$$

Dabei haben wir nur die Lösungen der Differentialgleichungen angegeben, die zum Koordinatenursprung, den wir in den Mittelpunkt des Reaktors legen wollen, symmetrisch sind. X_0, Y_0, Z_0

sind die Amplituden der Funktionen X, Y, Z und $\Phi_0 = X_0 \cdot Y_0 \cdot Z_0$ ist der Neutronenfluß in der Mitte des Reaktors.

Nun sind noch die Randbedingungen festzulegen. Das geschieht durch die Annahme, daß der Neutronenfluß an allen Wänden des Reaktors verschwinden soll. Es sei dabei noch einmal darauf hingewiesen, daß mit Φ der statistische Neutronenfluß, der ein Maß ist für die Dichte der Neutronen im Reaktor, gemeint ist. Die Neutronendichte ist aber außerhalb des Reaktors und damit auch an seinem Rande gleich null zu setzen, denn die Neutronen, die einmal durch die Wände des Cores hinausgeraten sind, fliegen auch fort und gelangen nie mehr in den Reaktor zurück, falls nicht das Core von irgendeinem streuenden Material, einem Reflektor, umgeben ist. Das soll hier nicht der Fall sein. Während der statistische Fluß am Rande gleich null ist, ist der gerichtete Fluß, den wir mit j bezeichnet hatten, dort endlich, und sogar besonders groß.

Die Wände des quaderförmigen Reaktors mögen an den Stellen

$$x = \pm \frac{x_1}{2}, \; y = \pm \frac{y_1}{2}, \; z = \pm \frac{z_1}{2}$$

liegen.

x_1, y_1, z_1 sind also die Kantenlängen des Reaktorcores. Die Randbedingung, daß an allen diesen Stellen Φ verschwinden soll, legt die drei Werte k_x, k_y, k_z in der Weise fest, daß

$$k_x = \frac{\pi}{x_1} \; ; \; k_y = \frac{\pi}{y_1} \; ; \; k_z = \frac{\pi}{z_1} \text{ ist.}$$

Die Lösung Gl. (II, 125) wird damit:

$$\Phi = \Phi_0 \cos \frac{\pi}{x_1} x \cos \frac{\pi}{y_1} y \cos \frac{\pi}{z_1} z \qquad \text{(II, 126)}$$

und aus der Gl. (II, 124) wird:

$$B^2 = \pi^2 \left[\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{y_1^2} + \frac{1}{z_1^2} \right]. \qquad \text{(II, 127)}$$

Durch diese Gleichung ist es uns gelungen, die bisher noch offene Konstante B^2 für den quaderförmigen Reaktor durch die Kantenlängen x_1, y_1, z_1 auszudrücken, und es bestätigt sich damit die anfangs gestellte Behauptung, daß die Größe B^2 von der Form und der Größe des Reaktors abhänge.

Der Kugelreaktor

Der Kugelreaktor wird, obwohl er technisch keine Bedeutung hat, häufig als Hilfsmittel für Abschätzungen verwendet. Wir wollen ihn deshalb hier auch kurz besprechen.

Um die Diffusionsgleichung Gl. (II, 115) für den kugelsymmetrischen Fall zu lösen, benötigen wir den dafür zuständigen Δ-Operator. Er ist nach der Gl. (II, 30) $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$. Die Gl. (II, 115) wird damit

(II, 128) $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -B^2 \Phi.$$

Eine für uns geeignete Lösung der Gl. (II, 128) ist

(II, 129) $$\Phi = \Phi_0 \frac{\sin Br}{Br},$$

wie man durch Einsetzen der Gl. (II, 129) in die Gl. (II, 128) erkennt. Die Lösung Gl. (II, 129) ist eine um den Nullpunkt $r = 0$, den wir natürlich wieder in den Reaktormittelpunkt legen, symmetrische Funktion. Im Mittelpunkt ist wieder $\Phi = \Phi_0$. Die Randbedingung verlangt, daß der Fluß am Rande des Reaktors, der bei $r = r_1$, liegen möge, verschwindet. Das bedeutet:

(II, 130) $$B = \frac{\pi}{r_1}$$

und

(II, 131) $$\Phi = \Phi_0 r_1 \frac{\sin \frac{\pi}{r_1} r}{\pi r}.$$

Wieder hängt der Krümmungsfaktor B von der Größe und durch die Eigenart der Gl. (II, 130) von der Form des Reaktors ab.

Der Zylinderreaktor

Als dritten und technisch weitaus wichtigsten Typ besprechen wir noch den zylinderförmigen Reaktor.

Der Δ-Operator hat nach der Gl. (II, 31) hier die Form $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. r und z sind die Zylinderkoordinaten. Da jetzt zwei unabhängige Veränderliche r und z auftreten, ist wieder

der Produktansatz für die Lösung der Diffusionsgleichung

(II, 132) $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -B^2 \Phi$$

anwendbar:

$$\Phi = R(r) \cdot Z(z).$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in die Gl. (II, 132) erhält man:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R \cdot r}\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} - B^2.$$

Wieder steht auf der linken Seite nur eine Funktion von r, auf der rechten nur eine von z, so daß man beide Seiten gleich einer Konstanten, etwa $-C^2$ setzen kann. Dadurch erhalten wir zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

(II, 133) $$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + C^2 R = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + (B^2 - C^2) Z = 0.$$

Die zweite der Gl. (II, 133) läßt sich sofort lösen. Es ist

(II, 134) $$Z(z) = Z_0 \cos \sqrt{B^2 - C^2}\, z,$$

wobei wir wieder die Lösung herausgesucht haben, die um den Punkt $z = 0$, den wir in den Mittelpunkt des Reaktors legen, symmetrisch ist. Soll der Fluß Φ an den kreisförmigen Begrenzungswänden des Zylinderreaktors, sagen wir an den Stellen $+z_1/2$ und $-z_1/2$ verschwinden, so folgt aus der Gl. (II, 134)

(II, 135) $$\sqrt{B^2 - C^2} = \frac{\pi}{z_1}.$$

Die Konstante C^2 müssen wir aus der ersten der Gl. (II, 133) bestimmen. Die Lösung lautet:

(II, 136) $$R(r) = J_0(Cr).$$

$J_0(Cr)$ ist die Besselfunktion null-ter Ordnung. Uns interessiert im Augenblick nur der Bereich von $r = 0$ bis zur ersten Nullstelle der Funktion. Die erste Nullstelle liegt bei $Cr = 2{,}405$. Ist nun wieder r_1 der Radius des Zylinderreaktors, so müssen wir,

damit für $r = r_1$ der Neutronenfluß verschwindet, die noch freie Konstante C so wählen, daß

(II, 137) $$C = \frac{2{,}405}{r_1}$$

wird.

Damit ist die Konstante C und nach der Gl. (II, 135) auch der Krümmungsfaktor B durch die Abmessungen des Reaktors festgelegt. Es ist:

(II, 138) $$B^2 = \left(\frac{\pi}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{2{,}405}{r_1}\right)^2$$

und

(II, 139) $$\Phi = \Phi_0 J_0 \left(\frac{2{,}405}{r_1} r\right) \cdot \cos \frac{\pi}{z_1} z .$$

Häufig baut man die zylindrischen Reaktoren so, daß ihre Höhe z_1 gleich ist ihrem Durchmesser $2r_1$. In diesem besonderen Falle ist

(II, 138a) $$B^2 = \frac{1}{r_1^2}\left[\frac{\pi^2}{4} + 2{,}405^2\right] = 8{,}25 \frac{\pi}{r_1^2} \cdot$$

Ein Zylinder, dessen Höhe gleich dem Durchmesser ist, heißt „kubischer Zylinder". Man rechnet mit einem derartig geformten Reaktor häufig, obwohl, wie wir gleich sehen werden, der kubische Zylinder bezüglich der Neutronenökonomie nicht der günstigste ist; denn wenn wir uns daran erinnern, daß B^2 ein Maß war für den Neutronenausfluß, so können wir, da nach der Gl. (II, 138) B^2 eine Funktion ist von der Höhe z_1 und dem Radius r_1 des Reaktors, ausrechnen, wie das Verhältnis von Höhe zu Durchmesser sein muß, damit bei gegebenem Reaktorvolumen $V = \pi r_1^2 z_1$ der Ausfluß, repräsentiert durch B^2, möglichst klein wird. Wir ersetzen also in der Gl. (II, 138) das r_1 durch das konstant zu haltende V und erhalten:

(II, 140) $$B^2 = \frac{\pi^2}{z_1^2} + \frac{2{,}405^2}{V} \cdot \pi z_1 .$$

Wollen wir daraus das Minimum des Ausflusses berechnen, so müssen wir die Gl. (II, 140) nach z_1 ableiten und die Ableitung gleich null setzen:

$$\frac{dB^2}{dz_1} = -\frac{2\pi^2}{z_1^3} + \frac{2{,}405^2}{V}\pi = 0 .$$

Daraus erhält man, nachdem man $V = \pi r_1^2 z_1$ wieder eingesetzt hat, für das optimale Verhältnis von Höhe zu Durchmesser des Reaktors:

$$\frac{z_1}{2r_1} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot 2{,}405} = 0{,}924\,. \tag{II, 141}$$

Der optimale zylindrische Reaktor ist also gegenüber dem kubischen ein wenig abgeflacht. Der Unterschied im Ausfluß ist jedoch sehr gering.

Die kritische Bedingung

Nachdem wir nun den Krümmungsfaktor erklärt haben, kommen wir noch einmal kurz auf die kritische Bedingung für den stationären Betrieb eines Reaktors Gl. (II, 118) zurück. Sie lautet:

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_\infty e^{-B^2\tau}}{1 + L^2 B^2}\,. \tag{II, 142}$$

Der unendliche Vermehrungsfaktor k_∞ ist eine Größe, die von der Substanz im Inneren des Reaktors abhängt, also vom Brennstoff, vom Moderator, von den vergiftenden Spaltprodukten, vom Kühlmittel usw., jedenfalls nicht von den Abmessungen des Reaktors. Das gleiche gilt für die Diffusionslänge L und das Fermialter τ. Die Größe $e^{-B^2\tau}$ und L^2B^2 sind wesentlich von der Form und Größe des Reaktors abhängig. Der Krümmungsfaktor B ist, wie man aus den Gln. (II, 127), (II, 130) und (II, 138) sieht, stets dem Reaktordurchmesser etwa umgekehrt proportional. Damit ist nun unsere schon mehrfach ausgesprochene Behauptung, daß der relative Ausfluß um so größer ist, je kleiner der Reaktor gebaut wird, für alle drei besprochenen Reaktorformen bestätigt.

Die kritische Bedingung Gl. (II, 142) schreibt uns, wenn wir den unendlichen Vermehrungsfaktor k_∞ als gegeben ansehen, eine ganz bestimmte Größe für den Reaktor vor; denn wenn k_∞, L^2 und τ fest vorgegeben sind, so ist das B^2 und damit die Größe des Reaktors durch die Gl. (II. 142) festgelegt, vorausgesetzt natürlich, daß wir uns zuvor darüber klar sind, welche Form wir dem Reaktor geben wollen.

10. Berechnung eines homogenen Reaktors

Wir wollen einmal, um uns eine Vorstellung von den Größenordnungen der in der Gl. (II, 142) vorkommenden Konstanten machen zu können, die Größe eines homogenen Reaktors ausrechnen.

Der erste Schritt, der zu unternehmen ist bei der Berechnung eines Reaktors, ist die Ermittlung des unendlichen Vermehrungsfaktors k_∞.

Da wir einen homogenen Reaktor berechnen wollen, besteht das k_∞ nur aus drei Faktoren: $k_\infty = p \cdot f \cdot \eta$; denn der ε-Faktor ist in diesem Falle gleich eins zu setzen.

Der p-Faktor für einen homogenen Reaktor ist nach der Gl. (II, 108)

$$\text{(II, 143)} \qquad p = e^{-\frac{N_u}{\xi \Sigma_s} \int (\sigma_{a\,u})_{\text{eff.}} \frac{dE}{E}} .$$

Darin ist N_u die Anzahl der Uranatome je cm³, die im Resonanzgebiet Neutronen einfangen. Es soll als Brennstoff ein Gemisch aus Uran-235 und Uran-238 in einem Mischungsverhältnis 1:50 verwendet werden. Wir nennen jetzt die Anzahl der Uran-235-Atome je cm³ N_{25} und die der Uran-238-Atome N_{28}. Diese Bezeichnung durch die Indizes 25 und 28 beginnt sich jetzt allgemein durchzusetzen. Die 2 bedeutet dabei Uran und die 5 bzw. 8 gibt die letzte Stelle der Massenzahl des betreffenden Atoms an. Das Mischungsverhältnis, oder, wie man häufiger sagt, die Anreicherung des Urans-235 ist also

$$\text{(II, 144)} \qquad x = \frac{N_{25}}{N_{28}} = 0{,}02 .$$

Als zweites müssen wir festsetzen, wieviele Moderatorkerne wir je Uran-238-Atom verwenden und welchen Moderator wir überhaupt wählen wollen. Wir entscheiden uns für Graphit und nehmen ein Mischungsverhältnis von Moderatorkernen zu Uran-238-Kernen je cm³ von

$$\text{(II, 145)} \qquad m = \frac{N_m}{N_{28}} = 400 .$$

Der Index m bezieht sich immer auf den Moderator.

Um den p-Faktor auszurechnen, brauchen wir nun noch den mittleren logarithmischen Energieverlust ξ je Stoß, den wir nach der Gl. (II, 49) mitteln müßten:

$$\bar{\xi} = \frac{N_m \sigma_{s\,m} \xi_m + N_{28} \sigma_{s\,28} \xi_{28} + N_{25} \sigma_{s\,25} \xi_{25}}{N_m \sigma_{s\,m} + N_{28} \sigma_{s\,28} + N_{25} \sigma_{s\,25}},$$

wobei die σ_s die mikroskopischen Streuquerschnitte bedeuten. Da aber die ξ_{28} und ξ_{25} wegen der großen Masse der Uranatome soviel kleiner sind als das ξ_m des Moderators und auch $N_{28}\sigma_{28}$ und $N_{25}\sigma_{25}$ viel kleiner ist als $N_m \sigma_m$, können wir mit guter Näherung $\bar{\xi} = \xi_m$ setzen. Aus der Tabelle Abb. II, 6 entnehmen wir

(II, 146) $$\xi_m = 0{,}158\,.$$

Das effektive Resonanzintegral ist in der Abb. II, 13 als Funktion des Streuquerschnittes je Uranatom dargestellt.

Nun benötigen wir, um den p-Faktor zu berechnen, nur noch den mikroskopischen Streuquerschnitt. Eigentlich müßten wir wieder die Streuung sowohl an den Moderator-, als auch an den Uranatomen berücksichtigen. Es müßten also $\Sigma_s = N_{28}\,\sigma_{s\,28} + N_{25}\,\sigma_{s\,25} + N_m\,\sigma_{s\,m}$ gesetzt werden, da aber der letzte Summand die beiden ersten weit überwiegt, setzen wir $\Sigma_s = N_m\,\sigma_{s\,m}$. Den Streuquerschnitt entnehmen wir der Tabelle II, 14

(II, 147) $$\sigma_{s\,m} = 4{,}8 \text{ barn}\,.$$

Tabelle II, 14. Wirkungsquerschnitte einiger Elemente, α-, η,- und ν-Werte

Element	σ_a	σ_{sp}	σ_r	σ_s	α	η	ν
$^{1}_{1}H$	0,33 b*			38 b			
$^{2}_{1}H$	0,46 mb			7 b			
$^{12}_{6}C$	4 mb			4,8 b			
$^{16}_{8}O$				4,2 b			
$^{232}_{90}Th$	7,6 b		7,3 b				
$^{233}_{92}U$	581 b	527 b	54 b		0,102	2,20	2,51
$^{235}_{92}U$	680 b	576 b	104 b		0,19	2,07	2,47
$^{238}_{92}U$	2,8 b		2,7 b				

* b = barn. mb = Millibarn = $^1/_{1000}$ barn.

Damit wird

(II, 148) $$\frac{\Sigma_s}{N_{28}} = \sigma_{sm} \frac{N_m}{N_{28}} = 1920\,.$$

Diesem Wert entspricht in der Abb. II, 13

$$\int_{E_{th}}^{E_{sp}} (\sigma_{au})_{\text{eff}} \frac{dE}{E} = 100\,.$$

Der p-Wert ist demnach

(II, 149) $$p = e^{-\frac{100}{0{,}158 \cdot 1920}} = e^{-0{,}33} = 0{,}719\,.$$

Als nächste Größe ist der η-Faktor zu berechnen. Der η-Faktor ist nach der Gl. (II, 111) das Produkt aus der Anzahl ν der durchschnittlich bei jeder Spaltung neu entstehenden Neutronen, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron, das im Brennstoff absorbiert wird, zu einer Uran-235-Spaltung führt. Es ist

$$\eta = \nu \frac{\sigma_{sp\,25}}{\sigma_{sp\,25} + \sigma_{\gamma\,25} + \frac{1}{x}\sigma_{28}}\,.$$

σ_{sp25} ist der Spaltquerschnitt des Urans-235 für thermische Neutronen und $\sigma_{\gamma 25}$ der Absorptionsquerschnitt für thermische Neutronen, die im Uran-235 absorbiert werden, aber nicht zur Spaltung führen. x ist der Anreicherungsfaktor nach der Gl. (II, 144), und σ_{28} der Absorptionsquerschnitt des Urans-238 für thermische Neutronen. Aus der Tabelle Abb. (II, 14) entnimmt man die Werte $\nu = 2{,}47$; $\sigma_{sp\,25} = 576$ barn; $\sigma_{\gamma\,25} = \sigma_{a\,25} - \sigma_{sp\,25} = 104$ barn; $\sigma_{28} = 2{,}8$ barn. Damit ist

(II, 150) $$\eta = 2{,}47 \frac{576}{576 + 104 + 50 \cdot 2{,}8} = 1{,}735\,.$$

Als dritten Bestandteil des Vermehrungsfaktors k_∞ berechnen wir nun noch den f-Faktor. Der f-Faktor gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß ein thermisches Neutron im Brennstoff und nicht im Moderator absorbiert wird. Nach der Gl. (II, 109) ist:

(II, 151) $$f = \frac{N_{25}\sigma_{25} + N_{28}\sigma_{28}}{N_{25}\sigma_{25} + N_{28}\sigma_{28} + N_m\sigma_m} = \frac{x\sigma_{25} + \sigma_{28}}{x\sigma_{25} + \sigma_{28} + m\sigma_m}\,.$$

Die σ sind die Absorptionsquerschnitte für thermische Neutronen. Sie werden wieder der Tabelle Abb. II, 14 entnommen.
Der Absorptionsquerschnitt des Graphits ist zwar um einige Größenordnungen kleiner als der des Urans, er fällt aber dennoch dadurch ins Gewicht, daß im Reaktor sehr viel mehr Moderator- als Uranatome enthalten sind.
Mit den angegebenen Werten wird der f-Faktor:

$$\text{(II, 152)} \quad f = \frac{0{,}02 \cdot 680 + 2{,}8}{0{,}02 \cdot 680 + 2{,}8 + 400 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 0{,}911\,.$$

Aus den drei Faktoren p, η, f setzt sich der unendliche Vermehrungsfaktor für den homogenen Reaktor zusammen:

$$\text{(II, 153)} \qquad k_\infty = 0{,}719 \cdot 1{,}735 \cdot 0{,}911 = 1{,}12\,.$$

Es stehen also für den Ausfluß der schnellen und der langsamen Neutronen 0,12 Neutronen je absorbiertes Neutron zur Verfügung, wenn der Reaktor kritisch sein, d.h. stationär laufen soll, und unser Ziel ist jetzt auszurechnen, bei welcher Reaktorgröße der Bruchteil der ausfließenden zu den im Inneren des Reaktors absorbierten Neutronen gerade 0,12 ist.
Dazu müssen wir zunächst noch die Diffusionslänge L^2 und den Krümmungsfaktor B^2 ausrechnen.
Die Diffusionslänge L^2 ist $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$, wobei Σ_a der makroskopische Absorptionsquerschnitt im Reaktor ist, also des Urans und des Moderators, und D die Diffusionskonstante des Uran-Moderatorgemisches, die wir hier aber gleich der Diffusionskonstanten des Moderators setzen können. Es ist demnach

(II, 154)
$$L^2 = \frac{D}{N_{25}\sigma_{25} + N_{28}\sigma_{28} + N_m\sigma_m} = \frac{D}{N_m\sigma_m} \cdot \frac{N_m\sigma_m}{N_{25}\sigma_{25} + N_{28}\sigma_{28} + N_m\sigma_m}.$$

Der erste Faktor $D/N_m\sigma_m = D/\Sigma_m$ ist die Diffusionslänge im reinen Moderator, also ohne Uran, eine Größe, die wir wieder der Tabelle Abb. II, 9 entnehmen können. Der zweite Faktor in der Gl. (II, 154) ist, wie man aus der Gl. (II, 151) sieht, gleich $1 - f$. Wir erhalten somit für die Diffusionslänge im Brennstoff-Moderatorgemisch die Beziehung:

$$\text{(II, 155)} \qquad L^2 = L_m^2\,(1 - f)\,.$$

L_m ist die Diffusionslänge im reinen Moderator. Nach der Tabelle Abb. II, 9 ist sie für Graphit: $L_m = 50$ cm. Dann ist:

(II, 156) $$L^2 = 2500 \cdot 0{,}089 = 222 \text{ cm}^2.$$

Das Fermialter τ in dem Brennstoff-Moderatorgemisch ist bei dem geringen Brennstoffgehalt gleich dem im reinen Moderator. Wir entnehmen der Tabelle Abb. II, 9:

$$\tau = 350 \text{ cm}^2 .$$

Damit haben wir nun alle Konstanten bestimmt, um aus der Gl. (II, 142) den Krümmungsfaktor B und damit die Größe des Reaktors ausrechnen zu können.
Zunächst einmal schätzen wir die Größenordnung von B^2 ab, indem wir den Ausflußfaktor der schnellen Neutronen $e^{-B^2\tau}$ gleich eins setzen. Dann erhalten wir nach der Gl. (II, 142) als erste Näherung:

$$B^2 \approx \frac{1}{L^2}(k_\infty - 1) = \frac{0{,}12}{222} = 0{,}54 \cdot 10^{-3} .$$

Wir sehen daraus, daß der Exponent $B^2\tau$ von der Größenordnung $^1/_{10}$ ist, und daß wir damit berechtigt sind, die Näherungsformel der kritischen Bedingung Gl. (II, 119) anzuwenden. Danach erhalten wir

(II, 157) $$B^2 = \frac{k_\infty - 1}{M^2} = \frac{0{,}12}{222 + 350} = 0{,}21 \cdot 10^{-3} .$$

Wollen wir den Krümmungsfaktor B genauer nach der Gl. (II, 142) berechnen, so verwenden wir am einfachsten ein graphisches Verfahren, indem wir die kritische Bedingung Gl. (II, 142) in der Form

(II, 158) $$e^{-B^2\tau} = \frac{1}{k_\infty} + \frac{L^2}{k_\infty \tau} B^2\tau$$

schreiben.
Die linke Seite der Gl. (II, 158) trägt man in Abhängigkeit von $B^2\tau$ graphisch auf. Ebenso die rechte Seite, die eine Gerade wird. Der Schnittpunkt dieser beiden Kurven gibt den Wert $B^2\tau$ an, der der kritischen Bedingung genügt.
Wir begnügen uns mit dem in der Gl. (II, 157) berechneten Wert. Um die Größe des Reaktors daraus zu bestimmen, müssen wir noch

wissen, welche Form er haben soll. Wir entscheiden uns für den kubischen Zylinder. Nach der Gl. (II, 138a) ist:

$$r_1 = \sqrt{\frac{8{,}25}{0{,}21 \cdot 10^{-3}}}\ \text{cm} = 1{,}98\ \text{m}\,.$$

Durchmesser und Höhe des Reaktors ist also etwa 4 m.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß alle in diesem letzten Abschnitt verwendeten Formeln nur den Wert von Abschätzungen haben können; denn es wurden die wirklich in einem Reaktor vorliegenden Verhältnisse stark idealisiert. So wurde z.B. der Einfluß der ortsabhängigen Temperatur, die sich im Inneren des Cores einstellt und die Neutronenproduktivität beeinträchtigt, nicht berücksichtigt. Ebenso war von einer Verzerrung der Neutronenflußfunktion Φ durch Regelstäbe und sonstige Einbauten in das Core nicht die Rede. Das Material in der Umgebung des Cores (z.B Reflektor) wurde nicht in Rechnung gesetzt. Derartige Einflüsse, die das bisher angenommene idealisierte Verhalten eines Reaktors stören, sollen in den folgenden Abschnitten besprochen werden.

III. STÖRUNGEN DER HOMOGENITÄT DES REAKTORCORES

Bisher wurde immer angenommen, daß die neutronenphysikalischen Eigenschaften der Materie an jedem Ort innerhalb des Reaktorcores die gleichen seien. Das ist — auch in einem homogenen Reaktor — keineswegs der Fall. Zum Beispiel bringt die von Ort zu Ort im Core wechselnde Temperatur eine Inhomogenität mit sich. Auch kann es sein, daß sich sogenannte Giftstoffe in bestimmten Bereichen des Reaktors ansammeln. Giftstoffe sind Neutronenfänger, die Neutronen nutzlos absorbieren, im allgemeinen Spaltprodukte. Schließlich brennt auch der Brennstoff im Core nicht gleichmäßig ab, sondern im allgemeinen in der Mitte schneller als am Rande, weil dort der Brennstoffumsatz wegen des viel größeren Neutronenflusses größer ist. Die Folge ist, daß die Produktion neuer Spaltungsneutronen nach einiger Zeit in der Coremitte nachläßt und die Neutronenflußkurve dort ein wenig abflacht. Alle diese zuletzt genannten Effekte bedingen Unregelmäßigkeiten

der Reaktivität im Reaktorcore, und wir wollen im folgenden Abschnitt zeigen, wie sich solche kleinen räumlichen Unregelmäßigkeiten auf die Gesamtreaktivität des Reaktors auswirken.

1. Räumliche Schwankungen des Krümmungsfaktors

Wir haben im Abschnitt (II, 10) den Krümmungsfaktor B einerseits als eine Eigenschaft des im Reaktorcore enthaltenen Materials, andererseits als einen Geometriefaktor für das ganze Reaktorcore kennengelernt. Ist der Krümmungsfaktor als Materialeigenschaft, wie er z.B. in der Gl. (II, 116) definiert wurde, über das ganze Reaktorcore konstant, so hängt er in der Form der Gln. (II, 127, 130, 140) unmittelbar mit den geometrischen Gegebenheiten des Reaktorcores in einfacher Weise zusammen.

Wir werden im folgenden unterscheiden zwischen dem geometrischen Krümmungsfaktor und den Materialkrümmungsfaktoren. Der geometrische Krümmungsfaktor hängt von der Geometrie, d.h. im wesentlichen von der Größe des ganzen Reaktorcores ab, vorausgesetzt, daß der Reaktor kritisch ist. Diese letzte Forderung wiederum verlangt die der Gl. (II, 118) entsprechenden Neutronenphysikalischen Eigenschaften des Corematerials. Man kann demnach den Krümmungsfaktor auch als eine Materialeigenschaft ansehen, und einen materiellen Krümmungsfaktor definieren. Ist das Core völlig homogen, so ist der geometrische Krümmungsfaktor identisch mit dem materiellen. Ist aber das Core aus mehreren Teilen verschiedenartiger Materialien zusammengesetzt, etwa so, daß im unteren Teil die Neutronenergiebigkeit größer ist als im oberen, so hat es keinen Sinn für jeden der beiden Teile einen geometrischen Krümmungsfaktor anzugeben, wohl aber gibt es gemäß der Gl. (II, 118) einen materiellen Krümmungsfaktor für jeden einzelnen Teil. Wie sich dann aus diesen materiellen Krümmungsfaktoren der geometrische Krümmungsfaktor für den ganzen Reaktor zusammensetzt, soll im folgenden gezeigt werden.

Wir betrachten den Fall, daß sich der Krümmungsfaktor unstetig ändert, so daß er etwa in einem Volumenteil V_1 des Cores konstant und gleich B_1, in einem andern Teil V_2 gleich B_2 sei usw. Wir teilen also das ganze Core, dessen Rauminhalt V sei, in mehrere, sagen wir n Volumenteile $V_1 V_2 \ldots V_n$ mit den jeweils konstanten Krümmungsfaktoren $B_1 B_2 \ldots B_n$ auf.

Es wird wieder nur mit dem stationären Fall gerechnet, so daß in jedem Teilvolumen V_ν die Diffusionsgleichung

(III, 1) $$\Delta \Phi' + B_\nu^2 \Phi' = 0$$

gilt. Φ' soll dabei der Neutronenfluß sein, der sich, bedingt durch die Ungleichmäßigkeit des Krümmungsfaktors, im Core einstellt. Φ' ist also eine gegenüber der normalen Flußverteilung, wie wir sie in den Gln. (II, 125, 129, 139) für den Reaktor mit überall gleichem B^2 kennengelernt haben, im allgemeinen etwas verzerrte Flußverteilung.

Die normale Flußverteilung Φ ist gegeben durch die Diffusionsgleichung

(III, 2) $$\Delta \Phi + B^2 \Phi = 0\,.$$

Darin ist jetzt das B^2 der geometrische Krümmungsfaktor des ganzen Cores. Er muß ein Mittelwert aus den n Materialkrümmungsfaktoren der Gl. (III, 1) sein. Φ ist jetzt nicht der wirklich sich einstellende Fluß, sondern der Fluß, der sich einstellen würde, wenn der mittlere Krümmungsfaktor B im ganzen Core der gleiche wäre.

Um die Mittelungsvorschrift für die B_ν^2 zu erhalten, müssen wir uns einen Satz aus der Integralrechnung vergegenwärtigen. Er ist ein Sonderfall des Greenschen Satzes:

Betrachten wir das über das gesamte Corevolumen erstreckte Integral

(III, 3) $$\int_V (\Phi' \Delta \Phi - \Phi \Delta \Phi')\, dV$$

unter der Voraussetzung, daß sowohl der normale Fluß Φ, als auch der verzerrte Φ' am Rande verschwinden, was wir ja natürlich für den Reaktor verlangen müssen, so erkennen wir, daß auch das Integral selber verschwindet; denn schreiben wir z.B. die Δ-Operatoren in der Gl. (III, 3) für den Fall kartesischer Koordinaten und greifen jeweils eine der drei Variablen x, y oder z heraus, integrieren partiell nach ihr und betrachten die Randbedingung, so sehen wir, daß der Beitrag der Integration über diese Variable gleich null ist. Das gleiche ergibt sich für die beiden anderen Variablen, sowie bei der Verwendung anderer Koordinaten. Es gilt also, unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems und von der Art der Funktionen Φ und Φ', nur mit der Bedingung, daß diese beiden

Funktionen an einem gemeinsamen Rande verschwinden, und auch sonst natürlich physikalisch sinnvoll sind:

$$\text{(III, 4)} \qquad \int_V (\Phi' \Delta \Phi - \Phi \Delta \Phi') dV = 0 .$$

Wir brauchen nun nur noch die Gln. (III, 1) und (III, 2) in die Gl. (III, 4) einzusetzen, wobei wir die Gln. (III, 1) jeweils nur über ihren Gültigkeitsbereich, d.h. über das Volumen V_ν integrieren dürfen.

Es ergibt sich:

$$\text{(III, 5)} \qquad -\int_V \Phi' B^2 \Phi dV + \int_{V_1} \Phi B_1^2 \Phi' dV + \int_{V_2} \Phi B_2^2 \Phi' dV \ldots + \int_{V_n} \Phi B_n^2 \Phi' dV = 0 .$$

Die konstanten Krümmungsfaktoren können wir aus den Integralen herausziehen und erhalten:

$$\text{(III, 6)} \qquad B^2 \int_V \Phi' \Phi dV = B_1^2 \int_{V_1} \Phi' \Phi dV + B_2^2 \int_{V_2} \Phi' \Phi dV \ldots$$

Setzen wir jetzt noch näherungsweise $\Phi = \Phi'$, so gewinnen wir die gesuchte Mittelungsformel für die Krümmungsfaktoren:

$$\text{(III, 7)} \qquad B^2 = \frac{1}{\int_V \Phi^2 dV} \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^2 \int_{V\nu} \Phi^2 dV = \sum_{\nu=1}^{n} W_\nu B_\nu^2 .$$

Die Quadrate der Krümmungsfaktoren werden also mit dem Quadrat des Flusses gemittelt. Für die Faktoren

$$\text{(III, 8)} \qquad W_\nu = \frac{\int_{V\nu} \Phi^2 dV}{\int_V \Phi^2 dV}$$

hat sich gemäß der angelsächsischen Literatur der Name „Statistische Gewichte“ eingebürgert, obgleich das ganze Problem mit Statistik nichts zu tun hat. Wir wollen die W_ν in der Gl. (III, 8) „Gewichtsfaktoren“ nennen; denn in der Tat geben sie an, mit welchem Gewicht die einzelnen Krümmungsfaktoren B_ν an den verschiedenen Orten des Reaktors zu belegen sind. Zum Beispiel wird der materielle Krümmungsfaktor in der Mitte des Cores, wo der Fluß am größten ist, den Gesamtkrümmungsfaktor B am schwerwiegendsten beeinträchtigen.

Um die Gl. (III, 7) anwenden zu können, muß man sich die Gewichtsfaktoren der einzelnen Bereiche im Reaktor nach der Gl. (III, 8) ausrechnen. Die Abb. (III, 1) zeigt für einige Core-Formen die Ergebnisse für den Fall. daß das Core in zwei Bereiche eingeteilt ist, einen inneren und einen äußeren. Bei einer Kugel z.B. sind diese beiden Bereiche konzentrisch, beim Zylinder sind sie symmetrisch um die Mittelachse usw. Der Radius des mittleren Bereiches ist mit r, der des ganzen Reaktors mit r_1 bezeichnet. Nach oben ist der Gewichtsfaktor, nach rechts das Radiusverhältnis r/r_1 aufgetragen. Natürlich sind das Spezialfälle. Man kann den Reaktor ebensogut anders in Bereiche aufteilen. Zum Beispiel wird man in einem gasgekühlten Reaktor, in dem große Temperaturdifferenzen zwischen dem oberen und dem unteren Teil des Cores auftreten, die eine Abhängigkeit des materiellen Krümmungsfaktors in der Richtung seiner Zylinderachse bewirken, in horizontale Schichten aufteilen, oder, wenn man den Einfluß des stärkeren Brennstoffverbrauches in der Mitte eines zylindrischen Reaktorcores abschätzen will, so wird man das Core in einen kugel- oder zylinderförmigen Zentralbereich und die Randzone einteilen. Für jeden solchen Fall muß man sich die Gewichtsfaktoren, die man meistens nur näherungsweise bestimmen kann, ausrechnen.

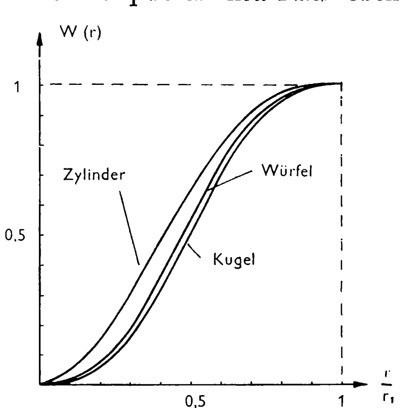


Abb. III, 1. Die Gewichtsfaktoren in Abhängigkeit vom Radiusverhältnis. Die obere Kurve gilt für den unendlich langen Zylinder, die mittlere für den Würfel, die untere für die Kugel

Man sieht also aus der Gl. (III, 7), daß man Abbrand, Vergiftung, Temperatureinfluß usw. nicht einfach dadurch berücksichtigen kann, daß man die Absortionsquerschnitte, die Temperatur oder sonstige charakteristische Größen über das Volumen mittelt und mit einem solchen Mittelwert dann den Einfluß auf den Krümmungsfaktor B^2 ausrechnet, sondern daß man alle solche Effekte mit den entsprechenden räumlichen Gewichten versehen muß, um den richtigen Mittelwert des Krümmungsfaktors zu erhalten.

Zuweilen ist es, namentlich für Abschätzungen, zweckmäßig, die Änderung eines materiellen Krümmungsfaktors B_ν auf die entsprechende Änderung des gesamten geometrischen Krümmungsfaktors B und damit wieder auf eine Änderung des effektiven Vermehrungsfaktors k_{eff} umzurechnen:

$$\text{(III, 8a)} \qquad dB^2 = \frac{\int\limits_{V_\nu} \Phi^2 dV}{\int\limits_{V} \Phi^2 dV} dB_\nu^2 = W_\nu dB_\nu^2$$

und da nach der Gl. (II, 19)

$$dk_{\text{eff}} \approx \frac{-k_\infty M^2}{(1 + B^2 M^2)^2} dB^2 = - k_{\text{eff}} \frac{M^2}{1 + B^2 M^2} dB^2$$

ist, wird

$$\text{(III, 8b)} \qquad dk_{\text{eff}} = - k_{\text{eff}} \frac{M^2}{1 + B^2 M^2} W_\nu dB_\nu^2 .$$

Ein solches Verfahren ist nicht ganz konsequent; denn die Größe B, die nur von der Geometrie des Reaktors abhängt, kann sich ja im allgemeinen nicht ändern. Man meint mit dem dB^2 bzw. dk_{eff} eine scheinbare Änderung, die in Wirklichkeit nicht eintreten darf, die man vielmehr durch irgendwelche Maßnahmen kompensieren muß, um den Reaktor kritisch zu halten.

Besonders deutlich zeigt sich in den Gln. (III, 8a) und (III, 8b) die Bedeutung der Gewichtsfaktoren W_ν. Durch sie ist der Einfluß auf den geometrischen Krümmungsfaktor und den effektiven Vermerhrungsfaktor durch einen materiellen Krümmungsfaktor B_ν stark abhängig von dem Ort und dem Bereich im Reaktorcore, in dem sich das B_ν ändert.

2. Der Temperatureffekt

Nachdem im vorigen Abschnitt über den Einfluß der materiellen Krümmungsfaktoren in den verschiedenen räumlichen Bereichen des Reaktorcores gesprochen wurde, soll jetzt von dem Einfluß der Materialtemperatur im Reaktor auf die materiellen Krümmungsfaktoren die Rede sein. Da diese Temperaturen von Ort zu Ort stark wechseln können, wollen wir nicht, wie es meistens geschieht, aus einer Änderung der Durchschnittstemperatur im

Reaktor gleich auf die entsprechende Reaktivitätsänderung des ganzen Reaktors schließen, sondern lediglich den Temperatureinfluß auf den ortsabhängigen Krümmungsfaktor ermitteln. Die Änderung des Gesamtkrümmungsfaktors und damit die Änderung der Gesamtreaktivität muß dann nach der Gl. (III, 8b) berechnet werden, bzw. es muß nach der Gl. (III, 7) ausgerechnet werden, wie man den Krümmungsfaktor in einem Bereich des Cores ändern muß (etwa durch Regelstäbe), wenn er sich in einem anderen Teil durch Temperatureinfluß geändert hat, unter der Bedingung, daß der mittlere Krümmungsfaktor konstant bleibt, d.h. der Reaktor nach wie vor kritisch ist.

Man kann die Temperatureinflüsse auf den Krümmungsfaktor aufteilen in solche, die die Kernreaktionen mit Neutronen direkt und solche, die die Neutronendiffusion betreffen.

Unter den ersteren ist vor allem die Änderung der thermischen Absorptionsquerschnitte mit der Temperatur zu nennen.

Es wurde im Anfang gesagt, daß der Absorptionsquerschnitt der Kerne für thermische Neutronen etwa umgekehrt proportional ist der Neutronengeschwindigkeit ($1/v$-Gesetz). Da die mittlere Neutronengeschwindigkeit proportional ist der Wurzel aus der mittleren kinetischen Energie, die Energie aber, da es sich um thermische Neutronen handelt, die mit der Corematerie im thermischen Gleichgewicht stehen, wieder proportional der absoluten Temperatur ist, ist der Absorptionsquerschnitt der Atome umgekehrt proportional der Wurzel aus der Temperatur des Corematerials und zwar im wesentlichen der Temperatur des Moderators; denn einerseits finden die weitaus meisten Stöße der Neutronen an Moderatorkernen statt, und zum andern ist auch die Energieübertragung von den leichten Moderatorkernen auf die Neutronen viel besser als die von den schweren Brennstoffkernen. Die Neutronentemperatur ist also im wesentlichen die des Moderators.

Ist also der mikroskopische thermische Absorptionsquerschnitt bei einer Normaltemperatur, die wir T_0 nennen wollen, σ_{a0}, so ist bei einer Temperatur T

(III, 9) $$\sigma_a = \sigma_{a0} \sqrt{\frac{T_0}{T}}\,.$$

Diese Gl. (III, 9) gilt für alle Atome, die im Reaktor thermische Neutronen absorbieren.

Die Streuquerschnitte hängen auch etwas von der Temperatur ab, aber nicht stark. Wir wollen diesen Temperatureinfluß deshalb vernachlässigen.

Der zweite, die Kernreaktionen selbst betreffende Temperatureffekt wirkt sich im Resonanzintegral, also auf den p-Faktor aus Dieser Einfluß entsteht dadurch, daß die Atomkerne während des Resonanzeinfanges thermische Bewegungen ausführen, so daß die Relativgeschwindigkeit zwischen Kern und Neutron für den Resonanzeinfang maßgebend ist. Die Bewegungen der Kerne wie auch die der Neutronen sind aber statistischer Art, so daß sich die Geschwindigkeiten von Kern und Neutron nach statistischen Gesetzen addieren oder subtrahieren. Die Folge davon ist eine Verbreiterung der Resonanzspitzen und damit eine Vergrößerung der Einfangwahrscheinlichkeit. Der p-Faktor sinkt also mit wachsender Temperatur.

Die übrigen Temperatureffekte betreffen die Diffusion der Neutronen. Sie wirken sich auf die Diffusionslänge L, das Fermialter τ und damit die Wanderungslänge M und schließlich auf die Coredimension, d. h. auf den geometrischen Krümmungsfaktor B aus.

Die Diffusionslänge ist definiert als

(III, 10) $$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} = \frac{1}{3\Sigma_t \Sigma_a} .$$

Darin ist Σ_a der thermische makroskopische Absorptionsquerschnitt und Σ_t der makroskopische Transportquerschnitt entsprechend der mittleren freien Transportweglänge λ_t, die wir in der Gl. (II, 103) eingeführt hatten. Σ_a und Σ_t schreiben wir in der Form $\Sigma_a = N_a \sigma_a$; $\Sigma_t = N_t \sigma_t$. N_a ist die Anzahl der absorbierenden Atome und N_t die der streuenden Atome im cm^3. Diese Anzahlen N_a und N_t sind den Dichten ϱ proportional, und die Dichte hängt wiederum von der Temperatur über den linearen Ausdehnungskoeffizienten α ab.

(III, 11) $$\varrho = \frac{\varrho_0}{[1 + \alpha (T - T_0)]^3} .$$

Mit Hilfe der Gl. (III, 9) und (III, 11) erhalten wir für die Diffusionslänge:

(III, 12) $$L^2 = L_0^2 \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2} \sqrt{\frac{T}{T_0}} = L_0^2 [1 + \alpha (T - T_0)]^6 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$
$$\approx L_0^2 [1 + 6\alpha (T - T_0)] \sqrt{\frac{T}{T_0}},$$

worin wieder die Indizes 0 den Zustand bei der Normaltemperatur T_0 kennzeichnen. Die Diffusionslänge wächst also mit der Temperatur.

Ebenso wie die Diffusionslänge ändert sich auch das Fermialter τ mit der Temperatur.

Das Fermialter ist nach der Gl. (II, 78) definiert:

(III, 13) $$\tau_{th} = \int_{E_{th}}^{E_{sp}} \frac{D(E)}{\xi \Sigma_s(E) E} dE.$$

Für D schreiben wir wieder $\frac{1}{3\Sigma_t}$, für $\Sigma_t: N_t \sigma_t$ und für $\Sigma_s: N_t \sigma_s$. Dann ist das Fermialter:

(III, 15) $$\tau = \int_{E_{th}}^{E_{sp}} \frac{1}{3\xi \sigma_t \sigma_s N_t^2} \frac{dE}{E}.$$

Da die Wirkungsquerschnitte $\sigma_t(E)$ und $\sigma_s(E)$ im Abbremsbereich gelten, der im wesentlichen weit oberhalb der thermischen Energie liegt, sind σ_t und σ_s temperaturunabhängig (sie sind ja ohnehin nahezu temperaturunabhängig). Auch ξ und E_{sp} sind temperaturunabhängig. Lediglich N_t^2 und E_{th} hängen von der Temperatur ab. Das Differential von τ wird deshalb

$$d\tau = -\frac{1}{3\xi \sigma_t \sigma_s N_t^2(E_{th})} \frac{dE}{E_{th}} + \int_{E_{th}}^{E_{sp}} \frac{1}{3\xi \sigma_t \sigma_s} d\left(\frac{1}{N_t^2}\right) \frac{dE}{E}.$$

Die Anzahl N_t hängt aber nicht von der Energie E der Neutronen, sondern von der Dichte und damit von der thermischen Energie, der Temperatur, ab. Wir können also das Differential $d\frac{1}{N_t^2}$ aus

dem Integral ziehen und erhalten:

$$d\tau = -\frac{1}{3\xi\,\Sigma_s\Sigma_t}\frac{dE}{E_{th}} - 2\frac{dN_t}{N_t}\int\limits_{E_{th}}^{E_{sp}}\frac{1}{3\xi\,\Sigma_t\Sigma_s}\frac{dE}{E}$$

(III, 16) $$d\tau = -\frac{1}{3\xi\,\Sigma_s\Sigma_t}\,d\ln E_{th} - 2\tau\frac{dN_t}{N_t}\,.$$

Da die thermische Energie der Temperatur und die Anzahl der streuenden Atome N_t der Dichte proportional ist, wird aus der Gl. (III, 16)

$$d\tau = \tau - \tau_0 = \frac{1}{3\xi\,\Sigma_s\Sigma_t}\ln\frac{T_0}{T} - 2\tau\frac{d\varrho}{\varrho_0}$$

und daraus mit der Gl. (III, 11)

(III, 17) $$\tau = \tau_0 + \frac{1}{3\xi\,\Sigma_s\Sigma_t}\ln\frac{T_0}{T} + \tau_0\frac{6a\,(T-T_0)}{[1+a\,(T-T_0)]^4}\,.$$

Damit haben wir die wesentlichen Temperatureinflüsse, die sich auf den materiellen Krümmungsfaktor in den verschiedenen Bereichen des Cores auswirken, besprochen. Die weitere Handhabung wäre etwa die, daß man zunächst die Krümmungsfaktoren B_ν in der Gl. (III, 7) so einsetzt, daß die Gl. (III, 7) bei einer gegebenen Reaktorgröße und bei der Temperatur T_0 befriedigt ist. Danach setzt man die durch den Temperatureffekt veränderten B_ν ein. Die Gl. (III, 7) wird dann im allgemeinen nicht mehr erfüllt sein, weil der geometrische Krümmungsfaktor wegen der nicht veränderten Geometrie des Reaktors der gleiche geblieben ist. Da der Reaktor aber nur kritisch ist, wenn die Gl. (III, 7) erfüllt ist, muß man den Ausgleich der gestörten Reaktivitätsbilanz dadurch wiederherstellen, daß man in einigen Bereichen des Cores die durch den Temperatureffekt bewirkte Änderung der B_ν in anderen Bereichen (oder auch den gleichen) künstlich, etwa durch Verschieben von Regelstäben, kompensiert.

Um die Wirkung der eben zusammengestellten Temperatureinflüsse auf die materiellen Krümmungsfaktoren B_ν zu berechnen, entnehmen wir der Gl. (II, 119) den Zusammenhang zwischen dem Krümmungsfaktor und den Materialkonstanten des

Reaktorcores. Es ist:

$$B_v^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + \tau}, \qquad \text{(III, 18)}$$

worin $e^{-B^2\tau}$ durch $1 - B^2\tau$ angenähert wurde.

Im Vermehrungsfaktor k_∞ ist nur der p-Faktor wesentlich von der Temperatur abhängig; denn der ε-Faktor betrifft die schnellen Neutronen, die von der Temperatur nicht beeinflußt werden, und in η und f kommen nur Quotienten von thermischen Absorptionsquerschnitten vor, die die gleiche Temperaturabhängigkeit ($1/v$-Gesetz) haben. Die Temperatureinflüsse auf L^2 und τ haben wir besprochen. Wir wollen hier nur eine Formel angeben, die bei kleinen Temperaturänderungen anwendbar ist.

Das Differential der Gl. (III, 18) ist:

$$dB_v^2 = \left[\frac{\partial B_v^2}{\partial k_\infty}\frac{dk_\infty}{dT} + \frac{\partial B_v^2}{\partial L^2}\frac{dL^2}{dT} + \frac{\partial B_v^2}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dT}\right] dT. \qquad \text{(III, 19)}$$

Die partiellen Differentialquotienten sind darin:

$$\frac{\partial B_v^2}{\partial k_\infty} = \frac{1}{L^2 + \tau}; \quad \frac{\partial B_v^2}{\partial L^2} = -\frac{k_\infty - 1}{(L^2 + \tau)^2}; \qquad \text{(III, 20)}$$

$$\frac{\partial B_v^2}{\partial \tau} = -\frac{k_\infty - 1}{(L^2 + \tau)^2}.$$

Da im k_∞ nur das p von der Temperatur abhängt, ist

$$\frac{dk_\infty}{dT} = \frac{k_\infty}{p}\frac{dp}{dT} \qquad \text{(III, 21)}$$

und aus den Gln. (III, 12) und (III, 17) wird:

$$\frac{dL^2}{dT} = L_0^2\left[6\alpha + \frac{1}{2T_0}\right]; \quad \frac{d\tau}{dT} = -\frac{1}{3\xi\Sigma_s\Sigma_t}\frac{1}{T_0} + 6\alpha\tau_0. \qquad \text{(III, 22)}$$

Durch die Kombination der Gln. (III, 19), (III, 20), (III, 21), (III, 22) erhält man die Änderung des materiellen Krümmungsfaktors mit der Temperatur.

Soweit betreffen alle abgeleiteten Temperatureinflüsse das Corematerial im Inneren des Reaktors. Es gibt außerdem noch einen Temperatureinfluß auf den geometrischen Krümmungsfaktor B dadurch, daß sich der Reaktor im ganzen bei Erhöhung der Temperatur ausdehnt. Dieser Einfluß hängt ein wenig, aber nicht

wesentlich, von der Gestalt des Cores ab. Da man allen Reaktoren wegen der günstigen Ausflußverhältnisse eine einigermaßen kubische Form gibt, d. h. ihre Höhe etwa gleich ihrer Breite macht, können wir uns bei der Behandlung dieses Temperatureffektes auf die Kugelform beschränken.

Für den Kugelreaktor ist der geometrische Krümmungsfaktor nach der Gl. (II, 130): $B = \frac{\pi}{r_1}$ und da der Reaktorradius r_1 linear mit der Temperatur wächst:

$$r_1 = r_{10}\,[1 + \alpha\,(T - T_0)],$$

wird

$$\text{(III, 23)} \quad dB^2 = \frac{dB^2}{dr_1}\,\frac{dr_1}{dT}\,dT = -\frac{2\pi^2}{r_{10}^3}\,\alpha\,dT = -\frac{2\alpha}{r_{10}}\,B_0^2\,dT.$$

Dieser Temperatureffekt ist der einzige positive unter allen, die wir bisher beschrieben haben, d. h. er ist der einzige, der die Neutronenökonomie verbessert. Er ist aber im allgemeinen auch der kleinste, so daß im ganzen genommen eine Erhöhung der Temperatur im Reaktor stets einen erhöhten Verbrauch an Neutronen mit sich bringt. Das ist bezüglich der Neutronenökonomie ein Nachteil, bezüglich der Sicherheit des Reaktors aber ein Vorteil; denn ein Reaktor, der zu heiß wird, schaltet sich selbsttätig dadurch ab, daß er die Kettenreaktion unterbricht.

Durch den Temperatureinfluß auf die Coregröße des Reaktors ändern sich in der Gl. (III, 7) neben dem geometrischen Krümmungsfaktor B nach der Gl. (III, 23) auch die Integrationsgrenzen mit der Temperatur. Jedoch bleiben die Gewichtsfaktoren nahezu unabhängig von der Temperatur, so daß es leicht ist, die Änderung des gesamten geometrischen Krümmungsfaktors B auf eine entsprechende Änderung eines der materiellen Krümmungsfaktoren B_ν nach der Gl. (III, 8a) umzurechnen, etwa das B_ν des Bereiches im Core, der die Regelstäbe enthält.

Zum Schluß sei noch ein Temperatureffekt erwähnt, der Reaktoren betrifft, die viel Uran-238, also auch Plutonium enthalten. Plutonium hat nämlich dicht oberhalb des thermischen Bereiches eine Resonanzspitze. Es gilt demnach nicht das $1/v$-Gesetz, das in der Gl. (III, 9) für den ganzen thermischen Bereich angenommen wurde. Das hat zur Folge, daß mit wachsender Temperatur, d. h.

mit wachsender mittlerer Geschwindigkeit v sich die Neutronenproduktion des Plutoniums erhöht. Der durch die Anwesenheit von Plutonium in einem thermischen Reaktor bedingte Temperaturkoeffizient ist also positiv. Wie man das besondere Verhalten des Plutoniums zu berücksichtigen hat, wird in den Tabellen über die Wirkungsquerschnitte der Materialien angegeben.

IV. DER HETEROGENE REAKTOR

Die Diffusionstheorie, wie wir sie in den vorangehenden Abschnitten dargestellt haben, bezog sich streng genommen nur auf den homogenen Reaktor; denn es wurde stets — z. B. bei der Ableitung des f-Faktors — angenommen, daß die Brennstoffatome dem gleichen Neutronenfluß Φ ausgesetzt sind, der auch im umgebenden Moderator herrscht. Das gilt aber nur dann, wenn Brennstoff und Moderator völlig durchmischt sind, also im homogenen Reaktor. Beim heterogenen Reaktor sind Brennstoff- und Moderatorbereiche voneinander getrennt. Der Neutronenfluß in einem Brennstoffelement ist dann sicher nicht mehr gleich dem im umgebenden Moderator, sondern viel kleiner, weil die Neutronenabsorption sowohl im Resonanzbereich als auch im thermischen Bereich im Brennstoff wesentlich stärker ist als außerhalb. Zwar entstehen im Brennstoff auch die Spaltungsneutronen, aber die diffundieren sehr schnell fort in den Moderator und gelangen erst von dort aus, im wesentlichen mit dem Energiespektrum, wie wir es in der Abbremstheorie für den reinen Moderator kennengelernt haben, in den Brennstoff zurück, wo sie im Resonanzgebiet und im thermischen Bereich zum großen Teil absorbiert werden. In diesen beiden Energiebereichen sinkt also der Neutronenfluß im Brennstoff gemäß der Abb. IV, 1 stark ab. Die Art dieser Flußdepression in den Brennstoffelementen bedingt die wesentlichen Eigenschaften des heterogenen Reaktors gegenüber dem homogenen.

Betrachten wir zunächst einmal die thermischen Neutronen. Sie entstehen fast ausschließlich im Moderatorbereich; denn im Brennstoffbereich sind im wesentlichen die schweren Urankerne enthalten, die für die Neutronenabbremsung ungeeignet sind,

zum anderen ist auch der Streuquerschnitt verhältnismäßig klein. Dort entstehen also keine thermischen Neutronen. Die aus dem Moderatorbereich in das Brennstoffelement eindiffundierenden Neutronen aber werden wegen des großen Absorptionsquerschnittes des Urans gleich an der Oberfläche absorbiert, so daß in die inneren Regionen nur noch ganz wenige thermische Neutronen gelangen. Die Neutronenflußamplitude in der Abb. IV, 1 sinkt deshalb im Randbezirk des Brennstoffelementes sehr steil ab.

Da die weitaus meisten thermischen Neutronen, die in das Brennstoffelement eindringen, gleich an dessen Oberfläche absorbiert werden, so daß die mittleren Brennstoffbereiche zur Gesamtabsorption nur einen verhältnismäßig geringen Beitrag leisten, ist auch die Gesamtabsorption durch die Brennstoffkerne in einem heterogenen Reaktor geringer, als in einem homogenen oder genauer gesagt, es ist das Verhältnis der im Brennstoff absorbierten thermischen Neutronen zu den im Moderator und im Brennstoff absorbierten beim heterogenen Reaktor geringer als beim homogenen, wenn das Verhältnis der Anzahlen an Brennstoff- und Moderatorkernen in beiden Reaktoren das gleiche ist. Der f-Faktor ist also im heterogenen Reaktor kleiner als im homogenen. Das ist zunächst ein Nachteil; denn den Vermehrungsfaktor k_∞ will man ja so groß wie möglich machen. Der Nachteil des kleineren f-Faktors wird jedoch dadurch überwogen, daß der p-Faktor um so mehr ansteigt. Das ist auf ähnliche Weise zu verstehen, wie das Absinken des f-Faktors.

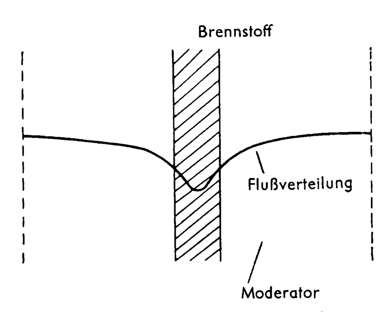


Abb. IV, 1. Die Flußverteilung innerhalb einer Zelle. Die gestrichelten Linien kennzeichnen die Zellenbegrenzungswände. Der Fluß hat im Brennstoffbereich eine tiefe Senke und läuft an den Zellwänden horizontal

Das Verhalten des p-Faktors ist durch die Resonanzspitzen des Urans bestimmt, es handelt sich also nicht wie beim f-Faktor um thermische Neutronen, sondern um Neutronen im Resonanzbereich. Wieder beruht die Änderung des p-Faktors im heterogenen gegenüber dem im homogenen Reaktor im wesentlichen auf der

Absorption der Neutronen an der Oberfläche der Brennstoffelemente und der Nichtbeteiligung der Brennstoffkerne im Inneren. Die Neutronen, die im Moderator die Resonanzenergie erreicht haben und in das Brennstoffelement eindringen, werden, falls ihre Energie gerade einer Resonanzspitze des Brennstoffs entspricht, mit großer Wahrscheinlichkeit an der Oberfläche eingefangen. Die mittleren Brennstoffbereiche beteiligen sich dann praktisch nicht am Einfang. Die Neutronen aber, deren Energie nicht einer Resonanzspitze entspricht, sind beim Durchlaufen des Brennstoffbereiches auch nicht sehr in Gefahr, eingefangen zu werden, weil sie durch Streuung an den schweren Urankernen nicht viel Energie verlieren und deshalb innerhalb des Brennstoffbereiches nicht leicht die Energie einer Resonanzspitze erreichen. Sie durchlaufen den Brennstoffbereich, gelangen wieder in den Moderator und werden dort weiter abgebremst. Wir sehen also auch hier, daß Neutronen, die im Resonanzbereich eingefangen werden, im wesentlichen an der Brennstoffoberfläche verloren gehen. Allerdings auch, wegen der Streuung und Abbremsung im Uran zum geringen Teil im Inneren des Brennstoffbereiches. Man teilt deshalb die Resonanzabsorption durch ein Brennstoffelement in einen Oberflächen- und einen Volumenanteil auf. Der erstere entspricht der Absorption an der Oberfläche der Brennstoffelemente, der letztere der im Inneren.

Eine weitere Verhütung des Resonanzeinfanges entsteht dadurch, daß ein Teil der Neutronen während des Durchlaufens des Resonanzbereiches gar nicht in das Brennstoffelement hineingelangt, sondern ganz im Moderator bleibt. Dieser Effekt ist jedoch viel geringer, als der eben geschilderte.

Die Verringerung des Resonanzeinfanges und damit die Steigerung des p-Faktors überwiegt die Verkleinerung des f-Faktors im allgemeinen. Hinzu kommt, daß der ε-Faktor, der bei homogenen Reaktoren gleich eins ist, beim heterogenen Reaktor größer ist als eins. Das liegt daran, daß die Spaltungsneutronen, die wegen ihrer großen kinetischen Energie zu Uranspaltungen führen können (Abschn. II, 8), nicht wie beim homogenen Reaktor gleich nach ihrer Entstehung durch die umliegenden Moderatorkerne abgebremst werden, sondern sich zunächst noch eine Weile im Brennstoffbereich aufhalten, bevor sie in den Moderator gelangen.

Der η-Faktor, der ja nur den Brennstoff selber betrifft, also unabhängig ist von der Anordnung des Brennstoffs im Moderator, ist für den heterogenen Reaktor der gleiche wie für den homogenen. Im ganzen genommen ist demnach der Vermehrungsfaktor $k_\infty = p \cdot \eta \cdot f \cdot \varepsilon$ in einem heterogenen Reaktor bei gleichem Verhältnis von Uran- zu Moderatorkernen größer als bei einem homogenen, was ja z. B. zur Folge hat, daß man mit natürlichem Uran als Brennstoff und Graphit als Moderator einen heterogenen Reaktor (z. B. Calder Hall) bauen kann, einen homogenen aber nicht, weil beim homogenen Reaktor der Vermehrungsfaktor k_∞ nicht groß genug gemacht werden kann.
Es soll nun versucht werden, die jetzt gegebene Beschreibung, die qualitativ die Vorgänge in einem heterogenen Reaktor charakterisierte, mathematisch ein wenig zu unterbauen.

1. Der f-Faktor

Die Berechnung des f-Faktors, des p-Faktors usw. für den heterogenen Reaktor läuft ähnlich wie die der entsprechenden Größen beim homogenen Reaktor. Jedoch werden wir an der Stelle des Kubikzentimeters, den wir beim homogenen Reaktor immer herausgriffen, hier für unsere Betrachtungen ein Raumelement wählen, das für die räumliche Struktur und deren Periodizität charakteristisch und außerdem bequem zu rechnen ist. Ein solches Raumelement ist die sogenannte Zelle des heterogenen Reaktors. Die Abb. IV, 2 zeigt die Aufteilung des Reaktorcores in Zellen. Die Brennstoffstäbe, senkrecht zur Papierebene gedacht, sind in irgendeiner regelmäßigen, hier quadratischen Anordnung, angebracht. Der Zwischenraum ist mit Moderatorsubstanz angefüllt. Das einfachste charakteristische Element dieser Anordnung wäre etwa das in der Abb. IV, 2 eingerahmte Quadrat, das allerdings rechnerisch wegen der

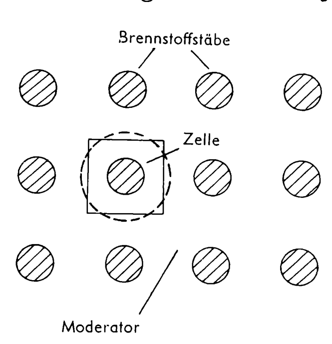


Abb. IV, 2. Einige nebeneinanderliegende Brennstoffstäbe und die Einteilung in Zellen. Das ausgezogene Quadrat bezeichnet die natürliche Zellenberandung, der gestrichelte Kreis die idealisierte

komplizierten Randbedingungen unbequem in der Handhabung wäre. Man ersetzt deshalb, um sich die Rechenarbeit zu erleichtern, die Zelle quadratischen Querschnittes durch eine solche mit kreisförmigem Querschnitt, wie es in der Abb. IV, 2 durch den gestrichelten Kreis angedeutet wurde. Der dadurch entstehende Fehler ist zu vernachlässigen.

Weiterhin nehmen wir vereinfachend an, daß der Neutronenfluß sich in der Längsrichtung der Brennstoffstäbe nicht ändert. Das heißt, daß er sich innerhalb der Zelle nur wenig in der Längsrichtung im Vergleich zur Radialrichtung ändert. Auch sollen Änderungen des Neutronenflusses von Zelle zu Zelle bei der Berechnung des Flusses innerhalb einer Zelle vernachlässigt werden. Wir können mit dieser Voraussetzung als endgültiges Zellenelement eine Kreisscheibe mit dem in der Abb. IV, 2 mit R_m bezeichneten Radius und der Höhe von 1 cm wählen.

Für eine solche Zelle wollen wir den f-Faktor berechnen, indem wir wie bei der Herleitung der Gl. (II, 109) schreiben:

$$\text{(IV, 1)} \qquad f = \frac{\Sigma_{a\,u}\,\overline{\Phi}_u\,V_u}{\Sigma_{a\,u}\,\overline{\Phi}_u\,V_u + \Sigma_{a\,m}\,\overline{\Phi}_m\,V_m}\,.$$

Darin ist $\Sigma_{a\,u}$ der makroskopische Absorptionsquerschnitt für thermische Neutronen im Brennstoff, Σ_{am} der im Moderator. $\overline{\Phi}_u$ ist der räumlich gemittelte thermische Neutronenfluß im Brennstoffbereich, $\overline{\Phi}_m$ der im Moderatorbereich. Es ist also

$$\text{(IV, 2)} \qquad \overline{\Phi}_u = \frac{1}{V_u}\int\limits_{V_u} \Phi_u\,dV; \qquad \overline{\Phi}_m = \frac{1}{V_m}\int\limits_{V_m} \Phi_m\,dV.$$

Φ_u ist der wirkliche Fluß im Brennstoff, Φ_m der im Moderator, V_u das Volumen des Brennstoffs in der Zelle, V_m das des Moderators. Überhaupt bezieht sich im folgenden immer der Index u auf den Brennstoff, der Index m auf den Moderatorbereich. Aus der Gl. (IV, 1) wird

$$\text{(IV, 3)} \qquad f = \frac{\Sigma_{a\,u}}{\Sigma_{a\,u} + \Sigma_{a\,m}\dfrac{\overline{\Phi}_m}{\overline{\Phi}_u}\dfrac{V_m}{V_u}}\,.$$

Da der mittlere Fluß im Moderator größer ist, als im Brennstoff, wird der f-Faktor, wie oben schon gesagt, kleiner als bei einem homogenen Reaktor gleicher Füllmengen an Uran und Moderator.

In der Gl. (IV, 3) muß noch die Größe $\overline{\Phi}_m/\overline{\Phi}_u$, der sogenannte Disadventage-Faktor bestimmt werden. Dazu müssen wir die Diffusionsgleichung einmal im Brennstoff-, zum anderen im Moderatorbereich lösen unter Beachtung der Übergangsbedingungen zwischen beiden Bereichen und der Randbedingung für die ganze Zelle.

Die für den Brennstoffbereich gültige Diffusionsgleichung lautet

$$(\text{IV}, 4) \qquad D_u \Delta \Phi_u - \Sigma_{a u} \Phi_u = 0 .$$

Es ist die Diffusionsgleichung für thermische Neutronen, die wir aus der Diffusionstheorie des homogenen Reaktors kennen. Es tritt ein Diffusions- und ein Absorptionsglied auf. Der Quellterm für die thermischen Neutronen wurde fortgelassen, weil, wie wir schon oben sagten, im Brennstoffbereich keine wesentliche Neutronenbremsung stattfindet.

Eine Lösungsfunktion der Gl. (IV, 4) ist die modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung $I_0 \sqrt{\frac{\Sigma_{a u}}{D_u}}\, r$. Sie ist eine ähnliche Funktion wie die Besselsche Funktion, steigt aber im Gegensatz zu dieser vom Mittelpunkt des Brennstoffelementes aus an, was man ja auch erwartet, da der thermische Neutronenfluß auf der Mittelachse des Brennstoffelementes ein Minimum haben muß. Der thermische Neutronenfluß im Innern des Brennstoffelementes gehorcht also der Funktion

$$(\text{IV}, 5) \qquad \Phi_u = A_1 \cdot I_0 (\varkappa_u r),$$

worin noch $\varkappa_u^2 = \frac{\Sigma_{a u}}{D_u}$ gesetzt wurde und r von der Mittelachse der Zelle gezählt wird.

Die Diffusionsgleichung für den Moderatorbereich der Zelle lautet

$$(\text{IV}, 6) \qquad D_m \Delta \Phi_m - \Sigma_{a m} \Phi_m + q_{th} = 0 .$$

Hier tritt wegen der Abbremsung im Moderatorbereich der Quellterm q_{th} für die thermischen Neutronen auf, der aber jetzt innerhalb der Zelle nicht ortsabhängig sein soll. Eine Lösung der Gl. (IV, 6) ist

$$(\text{IV}, 7) \qquad \Phi_m = A_2 I_0(\varkappa_m r) + A_3 K_0(\varkappa_m r) + \frac{q_{th}}{\Sigma_{a m}} .$$

Darin ist $K_0(\varkappa_m r)$ wieder eine modifizierte Besselfunktion, die wir jetzt hinzunehmen müssen, um alle Randbedingungen für die Zelle erfüllen zu können. Die ersten beiden Summanden in der Gl. (IV, 7) stellen eine allgemeine Lösung der Gl. (IV, 6) dar, wenn $q_{th} = 0$ gesetzt wird. Durch Einsetzen der Gl. (IV, 7) in die Gl. (IV, 6) überzeugt man sich davon, daß die Gl. (IV, 7) eine Lösung der vollständigen Gl. (IV, 6) ist.

Nun müssen noch die Konstanten A_1 A_2 A_3 durch die Übergangs- bzw. Randbedingungen festgelegt werden.

Als Randbedingung für jede Zelle müssen wir aus Symmetriegründen verlangen, daß bei stationärem Betrieb im Mittel kein Neutronenzu- oder -abfluß stattfindet. Wir werden also fordern

$$\text{(IV, 8)} \qquad \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial r}\right)_{R_m} = 0.$$

Diese Bedingung soll auf dem ganzen Zylindermantel $r = R_m$ der Zelle erfüllt sein. Sie gilt zwar streng genommen nur für den Mittelwert von $\frac{\partial \Phi_m}{\partial r}$, aber da die Änderung des mittleren Flusses von Zelle zu Zelle klein sein soll, wie wir oben voraussetzten, gilt die Gl. (IV, 8) jedenfalls mit guter Näherung.

Zu der Randbedingung kommen noch zwei Übergangsbedingungen:

$$\text{(IV, 9)} \qquad (\Phi_u)_{R_u} = (\Phi_m)_{R_u}; \qquad D_u \left(\frac{\partial \Phi_u}{\partial r}\right)_{R_u} = D_m \left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial r}\right)_{R_u}.$$

Die erste davon fordert die Stetigkeit des thermischen Neutronenflusses an der Grenze zwischen Brennstoff und Moderator $r = R_u$, die zweite verlangt, daß die Anzahl der Neutronen, die je Sekunde vom Moderator her die Grenzfläche zwischen Moderator und Brennstoff durchlaufen, auch im Brennstoffbereich ankommen, daß also zwischen Brennstoff und Moderator keine Neutronenstauung auftritt.

Die drei Randbedingungen Gl. (IV, 8) und (IV, 9) zusammen mit den Gl. (IV, 5) und (IV, 7) ergeben nach einiger Umrechnung die Bedingungsgleichungen für A_1

$$\text{(IV, 10)} \qquad \frac{1}{A_1} = \frac{\Sigma_{am}}{q_{th}} \Bigg[I_0(\varkappa_u R_u) - \frac{D_u \varkappa_u I_1(\varkappa_u R_u) \langle I_0(\varkappa_m R_u) \cdot K_1(\varkappa_m R_m) + K_0(\varkappa_m R_u) \cdot I_1(\varkappa_m R_m)\rangle}{D_m \varkappa_m \langle I_1(\varkappa_m R_u) \cdot K_1(\varkappa_m R_m) - K_1(\varkappa_m R_u) \cdot I_1(\varkappa_m R_m)\rangle} \Bigg].$$

Die Funktionen $I_1(\varkappa r)$ und $K_1(\varkappa r)$ sind Zylinderfunktionen, die durch Differentiation aus den I_0 und K_0 hervorgehen.

Die Größen A_2 und A_3 wurden für die Berechnung von A_1 verwendet, interessieren aber im weiteren nicht mehr.

Der f-Faktor, den wir im Abschn. II, 8 als die Anzahl der je Raumeinheit und je Sekunde im Brennstoff absorbierten thermischen Neutronen dividiert durch die Anzahl der je Raumeinheit und Sekunde thermisch werdenden Neutronen definierten, können wir jetzt ausrechnen, wobei wir aber als Raumeinheit die Zelle (Radius R_m, Höhe 1 cm) wählen. Die Anzahl der je Sekunde in der Zelle thermisch werdenden Neutronen ist $q_{th} \cdot \pi(R_m^2 - R_u^2)$, die der im Brennstoffbereich absorbierten thermischen Neutronen

$$2\pi \int_0^{R_u} \Sigma_{au}\, \Phi_u(r) \cdot r\, dr = 2\pi\, \Sigma_{au} \cdot A_1 \cdot \int_0^{R_u} r I_0(\varkappa_u r)\, dr$$

$$= \frac{2\pi\, A_1 \Sigma_{au} R_u}{\varkappa_u} I_1(\varkappa_u R_u)\,.$$

Der f-Faktor wird damit

$$f = \frac{2\pi\, \Sigma_{au}\, R_u I_1(\varkappa_u R_u)}{\pi\, q_{th} (R_m^2 - R_u^2)\, \varkappa_u} A_1$$

oder nach Einsetzen der Größe A_1, aus der Gl. (IV, 10):

$$\text{(IV, 11)} \qquad \frac{1}{f} = \frac{V_m \Sigma_{am}}{V_u \Sigma_{au}} \left[\frac{\varkappa_u R_u}{2} \frac{I_0(\varkappa_u R_u)}{I_1(\varkappa_u R_u)}\right]$$

$$+ \frac{\varkappa_m (R_m^2 - R_u^2)}{2 R_u} \left[\frac{I_0(\varkappa_m R_u)\, K_1(\varkappa_m R_m) + K_0(\varkappa_m R_u)\, I_1(\varkappa_m R_m)}{I_1(\varkappa_m R_m)\, K_1(\varkappa_m R_u) - K_1(\varkappa_m R_m)\, I_1(\varkappa_m R_u)}\right],$$

die man abgekürzt schreibt:

$$\text{(IV, 12)} \qquad f = \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{au} + \Sigma_{am} \frac{V_m}{V_u} \left[F + \frac{V_u}{V_m} \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}} (E - 1)\right]}$$

mit den Definitionen

$$\text{(IV, 13)} \begin{cases} F = \dfrac{\varkappa_u R_u}{2} \dfrac{I_0(\varkappa_u R_u)}{I_1(\varkappa_u R_u)} \\[2ex] E = \dfrac{\varkappa_m (R_m^2 - R_u^2)}{2 R_u} \dfrac{I_0(\varkappa_m R_u) \cdot K_1(\varkappa_m R_m) + K_0(\varkappa_m R_u) \cdot I_1(\varkappa_m R_m)}{I_1(\varkappa_m R_m)\, K_1(\varkappa_m R_u) - K_1(\varkappa_m R_m)\, I_1(\varkappa_m R_u)}\,. \end{cases}$$

Der Vergleich der Gln. (IV, 3) und (IV, 13) zeigt, daß der Disadvantage-Faktor $\overline{\Phi}_m/\overline{\Phi}_u$ gegeben ist durch

$$\frac{\overline{\Phi}_m}{\overline{\Phi}_u} = F + \frac{V_u}{V_m}\frac{\Sigma_{a\,u}}{\Sigma_{a\,m}}(E-1). \tag{IV, 14}$$

Da der zweite Summand in der Gl. (IV, 14) meistens klein ist gegenüber dem ersten, kann man mit guter Näherung

$$\frac{\overline{\Phi}_m}{\overline{\Phi}_u} = F \tag{IV, 15}$$

setzen.

Ähnliche Formeln wie die hier für die zylindrischen Zellen abgeleiteten, gewinnt man auf die gleiche Weise auch für anders geformte, etwa kugelförmige Zellen. In der Praxis haben jedoch die Zylinderzellen die größere Bedeutung.

2. Der p-Faktor

Während der f-Faktor eines heterogenen Reaktors verhältnismäßig zuverlässig berechnet werden kann, ist das beim p-Faktor bisher noch umstritten. Die Schwierigkeit liegt vor allem in der Unkenntnis verschiedener sogenannter Gruppenkonstanten. Das sind Konstanten wie $\varkappa$, Σ_a usw., die man im thermischen Bereich gut messen kann. Im Resonanzbereich aber, wo schon die Definition dieser Größen nicht einfach ist, ist ihre Messung oft nur auf Umwegen möglich und dementsprechend mit Fehlern behaftet. Wir wollen uns deshalb auf die Darstellung der einfachen Theorie des p-Faktors beschränken.

Die Berechnung des p-Faktors im heterogenen Reaktor läuft wieder ähnlich wie beim homogenen Reaktor. Allerdings kommt die Aufteilung des Resonanzeinfanges im Brennstoff in den Einfang an der Oberfläche und den im Inneren der Brennstoffbereiche hinzu.

Diese Aufteilung zeigt sich im Resonanzintegral bzw. im effektiven Absorptionsquerschnitt, den wir in der Gl. (II, 108) für den homogenen Reaktor mit $(\sigma_{a\,u})_{\text{eff}}$ bezeichnet hatten.

Betrachten wir wieder den Brennstoffbereich einer Zelle, so ist die Volumenabsorption, also die Resonanzabsorption, die sich über den ganzen Brennstoffbereich erstreckt, proportional der Anzahl der darin enthaltenen Brennstoffatome, gleich $a(E)\cdot N_u V_u$. Darin ist $a(E)$ ein Faktor, der nur von der Neutronenenergie und den

Materialeigenschaften des Brennstoffs abhängt, nicht aber von der Zellengeometrie. N_u ist die Anzahl der Brennstoffatome je Kubikzentimeter und V_u das Volumen des Brennstoffbereiches in der Zelle.

Die Oberflächenabsorption ist proportional der Oberfläche des Brennstoffbereiches in der Zelle (wobei natürlich nur der Zylindermantel zählt, nicht auch die beiden ebenen Grenzflächen) und außerdem proportional der Flächendichte der Uranatome an der Oberfläche des Brennstoffbereiches. Demnach ist die Oberflächenabsorption, wenn S die Brennstoffoberfläche in der Zelle und N'_u die Flächendichte der Brennstoffatome ist: $b'(E) N'_u S$. Darin ist $b'(E)$ wieder eine nur von der Energie abhängige Konstante.

Volumen- und Oberflächenabsorption ergeben zusammen, noch durch $N_u V_u$ dividiert, den mittleren effektiven Absorptionsquerschnitt für die Resonanzneutronen im heterogenen Reaktor

$$(\text{IV}, 16) \qquad (\sigma_{au}(E))_{\text{eff}} = a(E) + b'(E) \frac{S N'_u}{N_u V_u}\,.$$

Um diese Formel der allgemeinen Schreibweise anzugleichen, teilen wir noch dem $b'(E)$ einen Faktor, die Masse des Brennstoffatoms zu und erhalten

$$(\text{IV}, 17) \qquad (\sigma_{au}(E))_{\text{eff}} = a(E) + b(E) \frac{S}{M}\,.$$

b ist darin eine neue Konstante. M ist die Masse des Brennstoffes in der Zelle.

Die Bedeutung des effektiven Absorptionsquerschnittes $(\sigma_{au}(E))_{\text{eff}}$ ist die gleiche wie beim homogenen Reaktor. Dort war er in der Gl. (II, 108) definiert als das Produkt aus dem wirklichen Absorptionsquerschnitt und der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron im Kubikzentimeter eine Streuung erfährt. Es war also

$$(\text{IV}, 18) \qquad (\sigma_{au})_{\text{eff}} = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_a} \sigma_{au}\,.$$

Wenn wir nun den p-Faktor für den heterogenen Reaktor ausrechnen wollen, so können wir dabei genau so vorgehen, wie im homogenen Falle. Wir schreiben dazu die Gl. (II, 104) in der Form

$$(\text{IV}, 19) \qquad dQ = -\, Q \frac{1}{\xi} \frac{dE}{E} \cdot W_a\,.$$

Q ist die auf eine Zelle bezogene Bremsdichte und W_a die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Neutron bei einer Reaktion absorbiert wird, im homogenen Reaktor also:

$$\text{(IV, 20)} \quad W_a = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s} = \frac{N_u}{\Sigma_s} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_a + \Sigma_s} \sigma_{au} = \frac{N_u}{\Sigma_s} (\sigma_{au})_{\text{eff}} .$$

Im heterogenen Reaktor besteht nun das $(\sigma_{au})_{\text{eff}}$ aus zwei Anteilen $a(E)$ und $b(E) \cdot \frac{S}{M}$. Wollen wir das so definierte $(\sigma_{au})_{\text{eff}}$ hier verwenden, so müssen wir noch bedenken, daß im mittleren Brennstoffbereich, wo die Volumenabsorption stattfindet, ein anderer mittlerer Fluß herrscht, als im Bereich der Oberflächenabsorption. Der mittlere Fluß je Energieeinheit im Inneren des Brennstoffes sei $\bar{\varphi}_u$, der im Bereich der Oberflächenabsorption $\bar{\varphi}'_u$.

Der Volumenanteil der Wahrscheinlichkeit W_a im heterogenen Reaktor ist entsprechend der Gl. (IV, 20):

$$\text{(IV, 21)} \qquad \frac{N_u V_u \bar{\varphi}_u}{N_m V_m \bar{\varphi}_m \sigma_{sm}} a(E).$$

σ_{sm} ist der Streuquerschnitt im Moderator. Der zur Gl. (IV, 21) gehörende Oberflächenanteil ist

$$\text{(IV, 22)} \qquad \frac{N_u V_u \bar{\varphi}'_u}{N_m V_m \bar{\varphi}_m \sigma_{sm}} b(E) \frac{S}{M} .$$

Die Gleichung für W_a wird damit:

$$\text{(IV, 23)} \qquad W_a = \frac{N_u V_u}{\sigma_{sm} N_m V_m} \left[\frac{\bar{\varphi}_u}{\bar{\varphi}_m} a(E) + \frac{\varphi'_u}{\bar{\varphi}_m} b(E) \frac{S}{M} \right] .$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Gl. (IV, 19) ein, so erhalten wir nach Integration den p-Faktor:

$$\text{(IV, 24)} \qquad p = e^{-\frac{N_u V_u}{\sigma_{sm} N_m V_m \xi} \int\limits_{E_{th}}^{E_{sp}} \left[\frac{\bar{\varphi}_u(E)}{\bar{\varphi}_m(E)} a(E) + \frac{S}{M} \frac{\bar{\varphi}'_u(E)}{\bar{\varphi}_m(E)} b(E) \right] \frac{dE}{E}} .$$

Die Hauptschwierigkeit bei der praktischen Auswertung der Gl. (IV, 24) liegt darin, daß die Disadvantage-Faktoren für den Resonanzbereich schwer zu ermitteln sind. Zwar kann man wegen

des steilen Abfalls des Resonanzflusses im Grenzgebiet des Brennstoffbereiches den mittleren Fluß $\overline{\varphi}_u'$ an der Oberfläche ungefähr gleich dem mittleren Fluß im Innern des Brennstoffes setzen, aber auch dann fehlen noch zur Berechnung von $\overline{\varphi}_u/\overline{\varphi}_m$ die für den Resonanzbereich gültigen Konstanten. Sind aber diese Konstanten durch Messungen ermittelt worden, so läßt sich auf die gleiche Weise wie bei der Theorie des f-Faktors der Disadvantage-Faktor für den Resonanzbereich ausrechnen. Die Größen $a(E)$ und $b(E)$ bzw. des Resonanzintegral müssen ebenfalls aus Messungen ermittelt werden.

3. Der ε-Faktor

Neutronen mit sehr hoher kinetischer Energie, über 1 MeV, sind in der Lage, Urankerne zu spalten und dadurch neue Spaltungsneutronen unmittelbar, d. h. ohne den Umweg über die Abbremsung im Moderator, zu erzeugen. Dadurch wird die Ergiebigkeit an Spaltungs- und somit auch an thermischen Neutronen im heterogenen Reaktor gegenüber dem homogenen ein wenig gesteigert. Sehr groß ist diese Steigerung nicht, sie beträgt im allgemeinen etwa 3%. Aber für einen Reaktor, der mit natürlichem Uran betrieben wird, wo man also mit den Neutronen sehr haushalten muß, liefern die 3% doch einen recht beträchtlichen Anteil zum Vermehrungsfaktor.

Daß in einem heterogenen Reaktor im Unterschied zum homogenen eine Spaltung durch schnelle Neutronen in größerem Maße möglich ist, liegt daran, daß die Spaltungsneutronen im Brennstoffbereich durch elastische Zusammenstöße mit den schweren Uranatomen fast keine Energie verlieren, und dadurch während der ganzen Zeit ihres Aufenthaltes im Brennstoffbereich fähig sind, Urankerne durch ihre große Energie zu spalten. Der einzige Energieverlust, mit dem man im Brennstoffbereich zu rechnen hat, ist der durch inelastische Streuung an Uranatomen. Der durch die elastische Streuung bedingte Energieverlust wird vernachlässigt. Das gilt jedoch nur, wenn der Brennstoff reines Uran ist. Schon geringe Beimengungen an Stoffen geringen Atomgewichtes bringen eine so große Abbremswahrscheinlichkeit im Brennstoffbereich, daß die durch schnelle Neutronen bewirkten Spaltungen nicht mehr ins Gewicht fallen. Wir wollen uns deshalb in der folgenden

Berechnung des ε-Faktors auf den Fall des reinen Urans im Brennstoffbereich beschränken.

Die Rechnung hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der, die wir bei der Ableitung des Vermehrungsfaktors k_∞ anstellten. Wieder verfolgen wir das Schicksal von z Spaltungsneutronen, die zu irgendeiner Zeit im Brennstoffbereich entstehen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein solches Spaltungsneutron eine Reaktion mit einem Uranatom macht, und nicht aus dem Brennstoffbereich ausfließt, nennen wir w. Die möglichen Reaktionen im Brennstoffbereich sind: Spaltung, elastische Streuung, inelastische Streuung mit den entsprechenden mikroskopischen Wirkungsquerschnitten σ_f, σ_e, σ_i. Die Summe dieser Wirkungsquerschnitte, der Gesamtwirkungsquerschnitt sei σ.

Wir betrachten zunächst die Vermehrung bzw. den Bestand der schnellen Neutronen, also der Neutronen, die wegen ihrer großen Energie Urankerne spalten können. Die Anzahl der durch die z Spaltungsneutronen bewirkten ersten Reaktionen im Brennstoffbereich ist $z \cdot w$. Davon hat der Anteil σ_f/σ eine Spaltung, der Anteil σ_e/σ einen elastischen Stoß gemacht. Durch die Spaltung sind $\nu \frac{\sigma_f}{\sigma} z \cdot w$ neue Spaltungsneutronen entstanden. (ν hat die gleiche Bedeutung wie im Abschn. II, 8.) Durch den elastischen Zusammenstoß mit Urankernen soll praktisch keine Energie verloren gehen, so daß nach der ersten Reaktion $\frac{\sigma_e}{\sigma} z \cdot w$ Neutronen weiterhin als schnelle Neutronen für Spaltungen zur Verfügung stehen. Im ganzen sind also nach der ersten Reaktion $\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma} z \cdot w$ schnelle Neutronen vorhanden.

Von den $\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma} z \cdot w$ Neutronen wird wieder ein gewisser Anteil eine zweite Reaktion mit Urankernen machen. Die Wahrscheinlichkeit für die zweite und die nachfolgenden Reaktionen hat jedoch einen etwas anderen Wert als die für die erste, weil man annehmen muß, daß Spaltungsneutronen, die die erste Reaktion machen, wegen der überwiegenden Absorption der thermischen Neutronen *am Rande* des Brennstoffbereiches, auch dort mit Urankernen reagieren, während sich bei den nachfolgenden Reaktionen das Reaktionsgebiet sehr schnell über den *ganzen* Brennstoffbereich

verteilen wird. Die Wahrscheinlichkeit für weitere Reaktionen im Brennstoffbereich wird folglich größer sein als die für die erste. Wir nennen die Wahrscheinlichkeit für die zweite und die folgenden Reaktionen im Brennstoffbereich w' im Unterschied zu w, der Wahrscheinlichkeit für die erste Reaktion.

Von den $\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma} z \cdot w$ schnellen Neutronen, die nach der ersten Reaktion der z Spaltungsneutronen vorhanden waren, machen $\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma} zww'$ eine zweite Reaktion, so daß nach der zweiten Reaktion

$$\left(\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma}\right)^2 zww' = z\frac{w}{w'}\left(\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma} w'\right)^2$$

schnelle Neutronen vorhanden sind. Auf die gleiche Weise werden die darauffolgenden Reaktionen beschrieben. Nach n Reaktionen sind $z\frac{w}{w'}\left(\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma} w'\right)^n$ schnelle Neutronen vorhanden bzw. vor der n-ten Reaktion $z\frac{w}{w'}\left(\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma} w'\right)^{n-1}$.

Um den ε-Faktor zu berechnen, interessieren wir uns für den Anteil der Neutronen, die nach jeder Reaktion entweder aus dem Brennstoffbereich in den Moderator abfließen oder im Brennstoffbereich einen inelastischen Stoß machen. In beiden Fällen können wir annehmen, daß diese Neutronen für die Spaltung im schnellen Energiebereich nicht mehr in Betracht kommen; denn ein einmal in den Moderatorbereich gelangtes Neutron wird mit sehr großer Wahrscheinlichkeit stark abgebremst sein, bevor es einmal wieder in den Brennstoffbereich zurückgelangt, und auch beim inelastischen Stoß können wir annehmen, daß das Neutron so viel Energie verliert, daß eine Spaltung im schnellen Bereich ausgeschlossen ist.

Die Wahrscheinlichkeit für die erste Reaktion im Brennstoffbereich war w. Dann ist $1 - w$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Spaltungsneutron keine Reaktion im Brennstoffbereich macht, sondern ausfließt. Von den $z \cdot w$ Neutronen aber, die eine erste Reaktion machen, wird der Anteil σ_i/σ soweit abgebremst, daß er für weitere Spaltungen im schnellen Bereich ausscheidet. Die

Gesamtzahl der bei der ersten Reaktion ausscheidenden Neutronen ist also

$$z(1-w) + zw\frac{\sigma_i}{\sigma} = zw\left[\frac{1-w}{w} + \frac{\sigma_i}{\sigma}\right].$$

Vor der n-ten Reaktion sind $z\frac{w}{w'}\left(\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma}w'\right)^{n-1}$ schnelle Neutronen vorhanden, von denen der Anteil $(1-w')$ ausfließt und der Anteil $w'\frac{\nu\sigma_i}{\sigma}$ abgebremst wird. Bei der n-ten Reaktion scheiden also $z\cdot\frac{w}{w'}\left(\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma}w'\right)^{n-1}\cdot\left(1-w'+w'\frac{\sigma_i}{\sigma}\right)$ als schnelle Neutronen aus.

Zur Berechnung des ε-Faktors müssen wir die bei jeder Reaktion ausscheidenden Neutronen addieren:

(IV, 24)

$$\varepsilon = \frac{1}{z}\left\{zw\left[\frac{1-w}{w} + \frac{\sigma_i}{\sigma}\right] + zw\left[\frac{1-w'}{w'} + \frac{\sigma_i}{\sigma}\right]\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma}w'\right)^{n-1}\right\}$$

$$= w\left\{\left[\frac{1-w}{w} + \frac{\sigma_i}{\sigma}\right] + \frac{\frac{1-w'}{w'} + \frac{\sigma_i}{\sigma}}{1 - \frac{\nu\sigma_f + \sigma_e}{\sigma}w'}\right\}.$$

Die Reaktionswahrscheinlichkeiten w und w' lassen sich berechnen. Da die Auswertung der Rechnung jedoch schwierig ist, ist man auch hier auf Meßwerte angewiesen. Ebenso sind die Wirkungsquerschnitte nur durch komplizierte Messungen zu erhalten.

4. Die kritische Bedingung für den heterogenen Reaktor

Die Theorie des heterogenen Reaktors wurde so eingerichtet, daß die kritische Bedingung, wie wir sie in der Gl. (II, 142) für den homogenen Reaktor abgeleitet hatten, auch hier bestehen bleibt. Die in der kritischen Bedingung vorkommenden Größen müssen dann, um dieser Forderung zu genügen, entsprechend abgewandelt werden. Wie das zu geschehen hat, wurde in den vorangehenden Abschnitten für den f-, den p- und den ε-Faktor angedeutet, und es bleibt noch die Frage, ob auch die übrigen in der kritischen Bedingung vorkommenden Größen, das ist der vierte Faktor η des Vermehrungsfaktors k_∞, der Krümmungsfaktor B,

das Fermialter τ und die Diffusionslänge L, abgewandelt werden müssen.

Der η-Faktor ändert sich, wie schon gesagt wurde, nicht. Auch das Fermialter τ ist hier wie im homogenen Reaktor in guter Näherung gleich dem des Moderators, weil sich die Uranatome an der Abbremsung der Neutronen praktisch nicht beteiligen. Der Krümmungsfaktor B ist als Geometriefaktor für den ganzen Reaktor durch die kritische Bedingung von den übrigen Größen abhängig. Seine Bedeutung ist die gleiche wie beim homogenen Reaktor.

Die Diffusionslänge L wird hier definiert als $L = \sqrt{\frac{D}{\overline{\Sigma}_a}}$, worin wir für die Diffusionskonstante D wie im homogenen Reaktor die des Moderators einsetzen können, und $\overline{\Sigma}_a$ der mittlere Absorptionsquerschnitt für thermische Neutronen ist. Die Mittelungsvorschrift lautet

$$\text{(IV, 25)} \qquad \overline{\Sigma}_a = \frac{V_m \Sigma_{a\,m} \overline{\Phi}_m + V_u \Sigma_{a\,u} \overline{\Phi}_u}{V_m \overline{\Phi}_m + V_u \overline{\Phi}_u}$$

mit den gleichen Bezeichnungen wie im Abschnitt (IV, 1).

Durch Einsetzen der Gl. (IV, 3) in die Gl. (IV, 25) erhält man

$$\overline{\Sigma}_a = \frac{\Sigma_m}{1-f} \frac{V_m}{V_m + V_u \frac{\overline{\Phi}_u}{\overline{\Phi}_m}}$$

das wir, da V_u stets viel kleiner ist als V_m schreiben können:

$$\text{(IV, 26)} \qquad \overline{\Sigma}_a = \frac{\Sigma_m}{1-f}.$$

Für die Diffusionslänge ergibt sich daraus

$$\text{(IV, 27)} \qquad L = \sqrt{\frac{D}{\overline{\Sigma}_a}} = L_m \sqrt{1-f}.$$

L_m ist die Diffusionslänge im Moderator allein. Die Gl. (IV, 27) ist die gleiche, die wir auch für den homogenen Reaktor in der Gl. (II, 155) abgeleitet hatten.

Die kritische Bedingung des heterogenen Reaktors ist somit vollständig zurückgeführt worden auf die des homogenen Reaktors.

V. DIE ZWEIGRUPPENTHEORIE

Mit Hilfe der Zweigruppentheorie sollen in diesem Paragraphen zwei Probleme behandelt werden, die Berechnung eines Reaktors, der von einem Reflektor umgeben ist, und die der Reaktivitätsänderung durch den Einbau eines Regelstabes im Zentrum eines Reaktorcores.

Wir hatten bei der Behandlung der Diffusionsgleichung und ihrer Randbedingungen stets die Forderung gestellt, daß der Fluß der thermischen, wie der der schnellen Neutronen am Rande des Reaktorcores verschwindet. Diese Bedingung ist grundsätzlich nie zu erfüllen, weil sich immer eine bestimmte Anzahl Neutronen an der Core-Oberfläche aufhalten. Das folgt aus der Diffusionstheorie durch eine ähnliche Überlegung, wie wir sie im Abschnitt (II, 6) angestellt haben. Die Folge dieser Tatsache ist, daß der Reaktor scheinbar, d.h. im Hinblick auf den geometrischen Krümmungsfaktor ein wenig größer ist als das Core. Die scheinbare Corevergrößerung beträgt

(V, 1) $$d \approx \frac{2}{3} \lambda_t \, .$$

d heißt die „extrapolierte Länge“, weil man den Neutronenfluß über den Rand des Cores hinaus bis zu seinem Verschwinden im Abstand d von der Corewand extrapoliert. λ_t ist die Transportweglänge.

Die extrapolierte Länge ist jedoch recht klein und fällt bei der Berechnung eines Reaktors im allgemeinen kaum ins Gewicht. Wir haben sie deshalb hier stets vernachlässigt und wollen es auch im folgenden meistens tun.

Der Reflektor dient der scheinbaren Vergrößerung des Reaktorcores und damit der Verminderung des Ausflusses, oder anders gesagt er ersetzt bei vorgegebenem Krümmungsfaktor bzw. Ausfluß einen Teil des wertvollen Corematerials durch ein minderwertigeres Material. Reflektoren bestehen aus einem Neutronenstreuenden Stoff, z.B. Graphit, Wasser, schweres Wasser usw.

Durch die Umhüllung des Cores mit einem Reflektor erreicht man, daß der Neutronenfluß nicht am Rande des Cores verschwindet,

sondern scheinbar etwas außerhalb in einem Abstand δ von der Coreberandung (Abb. V, 1). δ nennt man die „Reflektorersparnis". Wir wollen eine einfache Formel für die Reflektorersparnis mit Hilfe der Eingruppentheorie ausrechnen, die jedoch lediglich zum Zwecke von Abschätzungen brauchbar ist. Genauere Formeln wird uns dann die Zweigruppentheorie liefern.

Da wir hier mit der Eingruppentheorie rechnen wollen, betrachten wir nur die Diffusion der *thermischen* Neutronen im Core und im Reflektor. Ferner wollen wir annehmen, daß das Reaktorcore so groß ist, daß wir die Grenzfläche zwischen Core und Reflektor als eben ansehen und infolgedessen in der näheren Umgebung dieser Grenzfläche mit Winkel- und Exponentialfunktionen anstatt mit Zylinderfunktionen rechnen können. Die Reflektordicke soll groß sein verglichen mit der Diffusionslänge L_r der thermischen Neutronen im Reflektor.

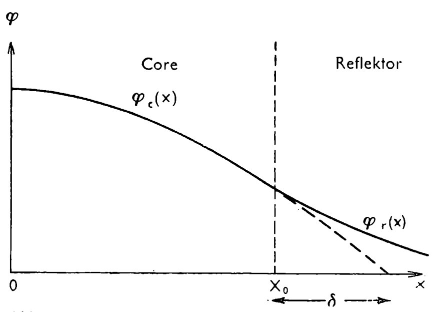


Abb. V, 1. Der wirkliche thermische Fluß (ausgezogene Kurve) und der scheinbare (gestrichelt). Die Abszisse $x = 0$ bezeichnet den Reaktormittelpunkt, $x = x_0$ die Grenzfläche zwischen Core und Reflektor

Im Core herrsche der thermische Fluß $\Phi_c(x)$, wobei die x-Richtung senkrecht auf der Grenzebene zwischen Core und Reflektor stehen soll (Abb. V, 1), die Grenzebene selber sei bei $x = x_0$. Der Neutronenfluß im Reflektor wird mit $\Phi_r(x)$ bezeichnet, und die verschiedenen Konstanten, wie Diffusionskonstanten, Diffusionslängen usw. werden sinngemäß mit den Indizes c und r versehen. Die Übergangsbedingung an der Grenzfläche zwischen Core und Reflektor sind erstens die Stetigkeit des Flusses

$$\Phi_c(x_0) = \Phi_r(x_0) \tag{V, 1}$$

und zweitens die der Diffusionsstromdichte j.

$$j(x_0) = -D_c \frac{\partial \Phi_c(x_0)}{\partial x} = -D_r \frac{\partial \Phi_r(x_0)}{\partial x}. \tag{V, 2}$$

Die beiden Funktionen $\Phi_c(x)$ und $\Phi_r(x)$ unterscheiden sich in unserem einfachen Beispiel wesentlich dadurch, daß $\Phi_c(x)$ nach oben und $\Phi_r(x)$ nach unten konvex ist. Das liegt an der Verschiedenartigkeit der Differentialgleichungen, denen die Funktionen $\Phi(x)$ in den verschiedenen Bereichen $x < x_0$ und $x > x_0$ gehorchen. Für das Core gilt die Gl. (II, 115):

$$\text{(V, 3)} \qquad D_c \Delta \Phi_c + \Sigma_a (k_\infty e^{-B^2 \tau} - 1) \Phi_c = 0$$

oder

$$\text{(V, 4)} \qquad \Delta \Phi_c + B_c^2 \Phi_c = 0 \,,$$

worin das Quadrat des Krümmungsfaktors B_c eine positive Größe ist. In dem hier behandelten eindimensionalen Falle ist die Lösung der Gl. (V, 4) eine Winkelfunktion, deren Krümmung für positive Werte von Φ_c stets nach oben konvex ist. Für den Reflektorbereich, wo, wie wir näherungsweise annehmen wollen, keine Quelle für thermische Neutronen ist, gilt die der Gl. (V, 3) entsprechende Gleichung ohne den Quellterm $k_\infty e^{-B^2 \tau}$:

$$\text{(V, 5)} \quad D_r \Delta \Phi_r - \Sigma_a \Phi_r = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta \Phi_r - \frac{1}{L_r^2} \Phi_r = 0$$

oder

$$\text{(V, 6)} \qquad \Delta \Phi_r + B_r^2 \Phi_r = 0 \,,$$

worin aber das B_r^2 jetzt eine negative, das B_r also eine imaginäre Größe ist. Die Lösungen der Gl. (V, 6) sind Exponentialfunktionen, die für positive Werte von Φ_r stets nach oben konkav sind. Der wirkliche Verlauf des Neutronenflusses $\Phi(x)$ wird also etwa die Gestalt der in der Abb. (V, 1) ausgezogenen Kurve haben.

Will man nun eine Größe definieren, die angibt, wieviel man durch die Anbringung eines Reflektors an Corematerial spart, so ist es sinnvoll, dazu die scheinbare Fortsetzung der Neutronenflußfunktion $\Phi_c(x)$ im Reflektorbereich — in der Abb. (V, 1) gestrichelt — zu benutzen. Die Reflektorersparnis δ ist dann der Abstand von der Grenzfläche x_0, bei dem die so extrapolierte Funktion die x-Achse schneidet; denn wir können dann so rechnen, als ob kein Reflektor vorhanden, dafür aber das Core um die Strecke δ vergrößert wäre.

Um eine Näherungsformel für die Reflektorersparnis δ zu erhalten, denken wir uns die in der Abb. (V, 1) gekrümmten Kurven teilweise durch Gerade ersetzt. Dann ist nach der Abb. (V, 1):

(V, 7) $$\frac{\partial \Phi_c(x_0)}{\partial x} = -\frac{\Phi_c(x_0)}{\delta}.$$

Daraus wird mit den Gln. (V, 1) und (V, 2):

(V, 8) $$\delta = -\frac{D_c}{D_r} \frac{\Phi_r(x_0)}{\frac{\partial \Phi_r(x_0)}{\partial x}}.$$

Die Größe $\Phi_r(x_0) / \frac{\partial \Phi_r(x_0)}{\partial x}$ gewinnen wir näherungsweise aus der Gl. (V, 5), deren Lösung ist:

$$\Phi_r(x) = \Phi_r(x_0)\, e^{-\frac{x-x_0}{L_r}}.$$

Für kleine Werte von $\frac{x-x_0}{L_r}$ ist das

$$\Phi_r(x) = \Phi_r(x_0)\left(1 - \frac{x-x_0}{L_r}\right)$$

und

(V, 9) $$\frac{\partial \Phi_r(x)}{\partial x} = -\Phi_r(x_0)\frac{1}{L_r}.$$

Schließlich erhält man für die Reflektorersparnis aus den Gln. (V, 8) und (V, 9):

(V, 10) $$\delta = \frac{D_c}{D_r} L_r.$$

1. Die Reflektorrechnung nach der Zweigruppentheorie

Die obige Näherungsrechnung für die Reflektorersparnis nach der Eingruppentheorie kann sicher keine sehr genauen Ergebnisse liefern; denn, abgesehen von den vereinfachenden Annahmen, die wir bei den linearen Extrapolationen der Neutronenflüsse gemacht haben, wurde nicht berücksichtigt, daß nicht nur die thermischen, sondern auch die schnellen Neutronen vom Core in den Reflektor diffundieren und umgekehrt. Wir müssen also, wenn wir genauer rechnen wollen, auch die Diffusion der schnellen Neutronen im Reflektor betrachten. Wie man das näherungsweise tun kann, soll hier am Beispiel der Zweigruppentheorie vorgeführt werden.

In der Zweigruppentheorie wird wieder, ähnlich wie bei der Eingruppentheorie, eine Idealisierung des Diffusionsvorganges aller Neutronen vorgenommen, indem man annimmt, daß es im Reaktor Neutronen zweier Energiestufen gibt, die schnellen und die langsamen, thermischen Neutronen. Jede dieser Gruppen wird so behandelt, als hätten alle darin enthaltenen Neutronen die gleiche Energie. Das hat, wie wir wissen, den Vorteil, daß man die einzelnen Gruppen mit der einfachen Diffusionstheorie, wie wir sie für die thermischen Neutronen abgeleitet haben, erfassen kann. Die Annahme trifft jedoch keineswegs zu, weil der Energiebereich der schnellen Gruppe sehr groß ist. Wieder, wie bei der Bestimmung des p-Faktors in heterogenen Reaktoren, hilft man sich dadurch, daß man die Konstanten, die in der Diffusionsgleichung für die schnellen Neutronen vorkommen, die Gruppenkonstanten, aus gemessenen Werten ermittelt. In der Festlegung der Gruppenkonstanten liegt auch hier die Hauptschwierigkeit bei der Anwendung der Mehrgruppentheorie.

Wir beginnen mit der Zusammenstellung der Diffusionsgleichungen der beiden Neutronengruppen, und zwar zunächst für das Reaktorcore.

Für die Gruppe der schnellen Neutronen gelten die folgenden Annahmen. Die Neutronen haben alle die gleiche Energie (in Wirklichkeit eine mittlere Energie). Quellneutronen für diese Gruppe sind die Spaltungsneutronen. Ist Σ^{th} der Absorptionsquerschnitt der thermischen Neutronen und Φ^{th} der Neutronenfluß der thermischen Gruppe, so werden je sec und je cm³ $\Sigma^{th}\Phi^{th}\eta f \varepsilon = \Sigma^{th}\Phi^{th}\frac{k_\infty}{p}$ Spaltungsneutronen erzeugt. Es wird dabei angenommen, daß der Resonanzbereich, wie es in diesem Falle der Zweigruppentheorie gerechtfertigt ist, im unteren Teil der schnellen Gruppe liegt. Deshalb wird der p-Faktor aus dem Vermehrungsfaktor k_∞ herausgenommen. Ein Teil $D^s \Delta \Phi^s$ der schnellen Neutronen diffundiert aus. D^s ist die Diffusionskonstante und Φ^s der Fluß der schnellen Neutronen. Für die schnellen Neutronen gibt es zwei Senken. Die eine entsteht durch den Resonanzeinfang im unteren Energiebereich, die andere dadurch, daß die schnellen Neutronen durch Abbremsung in den thermischen Bereich überwechseln. Beide Anteile sind proportional

dem Fluß der schnellen Neutronen Φ^s, so daß wir mit einer formal eingeführten Proportionalitätskonstanten Σ^s die Anzahl der je sec und je cm³ die schnelle Gruppe verlassenden Neutronen $\Sigma^s\Phi^s$ schreiben können. Damit wird die Diffusionsgleichung für die schnelle Gruppe

(V, 11) $$D^s \Delta \Phi^s - \Sigma^s \Phi^s + \frac{k_\infty}{p} \Sigma^{th} \Phi^{th} = 0\,^{1}.$$

Für die thermische Gruppe ist der Quellterm $\Sigma^s\Phi^s p$. Er ist um den Faktor p kleiner als die Senke der schnellen Gruppe $\Sigma^s\Phi^s$, weil vor dem Überwechseln der Neutronen in die thermische Gruppe noch der Bruchteil $(1-p)$ durch Resonanzabsorption verloren geht. Die Diffusionsgleichung für die thermische Gruppe ist demnach

(V, 12) $$D^{th} \Delta \Phi^{th} - \Sigma^{th} \Phi^{th} + p \Sigma^s \Phi^s = 0\,.$$

Wir wollen den p-Faktor nachträglich, um ihn nicht durch die ganze Rechnung mitziehen zu müssen, in den Fluß Φ_s hineingenommen denken, so daß in der den folgenden Gleichungen erscheinende Fluß Φ_s um den Faktor p kleiner ist, als der wirkliche Fluß der schnellen Neutronen. Wie stark man den Fluß Φ_s mit dem p-Faktor belasten muß, hängt noch von der Lage des Resonanzgebietes in der schnellen Gruppe ab. Wir schreiben mit dieser Abänderung die Gln. (V, 11) und (V, 12) in der Form:

(V, 13) $$D^s \Delta \Phi^s - \Sigma^s \Phi^s + k_\infty \Sigma^{th} \Phi^{th} = 0$$

(V, 14) $$D^{th} \Delta \Phi^{th} - \Sigma^{th} \Phi^{th} + \Sigma^s \Phi^s = 0\,.$$

Das sind gekoppelte partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den beiden Variablen Φ^s und Φ^{th}, die wir auf die folgende Art auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung mit einer Variablen umwandeln können. Wir wenden auf die Gl. (V, 13) den Operator $(D^{th}\Delta - \Sigma^{th})$ an. Das heißt wir wenden den Δ-Operator auf die Gleichung an und multiplizieren sie mit D^{th}, von diesem Gebilde subtrahieren wir dann die mit Σ^{th} multiplizierte

[1] Durch den oben rechts gestellten Index s wird jeweils die Gruppe der schnellen, durch th die der thermischen Neutronen gekennzeichnet.

Gl. (V, 13). Die Gl. (V, 14) multiplizieren wir mit $k_\infty \Sigma^{th}$ und erhalten:

$$(D^{th}\Delta - \Sigma^{th})\, D^s \Delta\, \Phi^s - (D^{th}\Delta - \Sigma^{th})\, \Sigma^s \Phi^s + (D^{th}\Delta - \Sigma^{th})\, k_\infty \Sigma^{th} \Phi^{th} = 0$$

$$k_\infty \Sigma^{th} \Sigma^s\, \Phi^s + k_\infty \Sigma^{th} (D^{th}\Delta - \Sigma^{th})\, \Phi^{th} = 0\,.$$

Diese beiden Gleichungen voneinander subtrahiert ergibt:

(V, 15)

$$D^{th} D^s \Delta^2 \Phi^s - (\Sigma^{th} D^s + \Sigma^s D^{th}) \Delta \Phi^s - \Sigma^{th} \Sigma^s (k_\infty - 1)\, \Phi^s = 0\,.$$

Der Operator Δ^2 bedeutet einfach die zweimalige Anwendung des Δ-Operators.

Die Gl. (V, 15) kann man auch in der Form

(V, 16)
$$\left\{\Delta - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4(k_\infty - 1)}{L^2 \tau}}\right]\right\} \cdot \left\{\Delta - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4(k_\infty - 1)}{L^2 \tau}}\right]\right\} \Phi^s = 0$$

schreiben, worin noch $\frac{D^{th}}{\Sigma^{th}} = L^2$ und $\frac{D^s}{\Sigma^s} = \tau$ gesetzt wurde. Von der Identität der Gln. (V, 15) und (V, 16) kann man sich durch Ausmultiplizieren der beiden Faktoren in der Gl. (V, 16) überzeugen.

Man kann, wie man aus diesen Rechnungen sieht, den Δ-Operator wie eine Konstante behandeln. Die Gl. (V, 15) ist dann eine quadratische Gleichung in Δ, die man in der üblichen Weise in Faktoren Gl. (V, 16) aufteilen kann. Jeder der Einzelfaktoren der Gl. (V, 16) muß für sich gleich null werden können, so daß wir aus der Gl. (V, 16) die beiden voneinander unabhängigen Gleichungen

(V, 17)
$$\Delta\, \Phi^s + B_1^2\, \Phi^s = 0$$

und

(V, 18)
$$\Delta\, \Phi^s + B_2^2\, \Phi^s = 0$$

erhalten, mit

(V, 19)
$$B_1^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4(k_\infty - 1)}{L^2 \tau}}\right]$$

(V, 20) $$B_2^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4(k_\infty - 1)}{L^2 \tau}}\,\right].$$

B_1 und B_2 sind Materialkrümmungsfaktoren. B_1^2 ist eine negative, B_2^2 eine positive Größe, so daß B_1 ein imaginärer, B_2 ein reeller Wert ist.

Würde man die Rechnung von den Gln. (V, 13) und (V, 14) an so geführt haben, daß nicht das Φ^{th}, sondern das Φ^s eliminiert wurde, so hätte man dieselbe Gl. (V, 16) erhalten, aber mit der Variablen Φ^{th} anstatt Φ^s. Es genügt also auch der Fluß Φ^{th} den Gleichungen

(V, 21) $$\Delta\, \Phi^{th} + B_1^2\, \Phi^{th} = 0$$

und

(V, 22) $$\Delta\, \Phi^{th} + B_2^2\, \Phi^{th} = 0\,.$$

Es gibt demnach für Φ^s und für Φ^{th} je zwei voneinander unabhängige Lösungen, die wir X_1 und X_2 nennen wollen. Dabei soll X_1 zum Krümmungsfaktor B_1 und X_2 zu B_2 gehören. Die Lösungen der Gln. (V, 17) und (V, 21) und die der Gln. (V, 18) und (V, 22) sind einander wegen der gleichen Symmetriebedingungen für den schnellen und den thermischen Fluß jeweils proportional. Die allgemeinen Lösungen für den schnellen und den thermischen Fluß sind demnach

(V, 23) $$\Phi^s = A X_1 + C X_2$$

(V, 24) $$\Phi^{th} = A' X_1 + C' X_2\,.$$

Aber auch zwischen den Konstanten A und A' und C und C' besteht eine Beziehung. Das liegt an der Kopplung zwischen schnellem und thermischem Fluß gemäß den Gln. (V, 13) und (V, 14). Aus der Gl. (V, 14) folgt, wenn man nach den Gln. (V, 21) und (V, 22) $\Delta\, \Phi^{th} = -B^2\, \Phi^{th}$ setzt

(V, 25) $$\frac{\Phi^{th}}{\Phi^s} = \frac{\Sigma^s}{D^{th} B^2 + \Sigma^{th}} = \frac{D^s}{\tau D^{th}}\,\frac{1}{\frac{1}{L^2} + B^2}\,.$$

B^2 kann darin, je nach dem, ob es sich um die Funktion X_1 oder X_2 handelt, den Wert B_1^2 oder B_2^2 annehmen. Da die Konstanten A und C einerseits und A' und C' andererseits willkürlich gewählt

werden können, setzen wir einmal C und $C' = 0$, das andere Mal A und A'.

Im ersten Fall erhalten wir aus den Gln. (V, 23), (V, 24) und (V, 25):

$$\text{(V, 26)} \qquad \frac{\Phi^{th}}{\Phi^s} = \frac{A'}{A} = \frac{D^s}{\tau D^{th}} \frac{1}{\frac{1}{L^2} + B_1^2} = S_1 ,$$

im zweiten Falle

$$\text{(V, 27)} \qquad \frac{\Phi^{th}}{\Phi^s} = \frac{C'}{C} = \frac{D^s}{\tau D^{th}} \frac{1}{\frac{1}{L^2} + B_2^2} = S_2 .$$

Die damit eingeführten Größen S_1 und S_2 heißen Kopplungsfaktoren, weil sie ein Maß sind für Abhängigkeit zwischen den beiden Neutronenflüssen Φ^{th} und Φ^s. Die Gln. (V, 23) und (V, 24) können wir damit schreiben:

$$\text{(V, 28)} \qquad \Phi^s = AX_1 + CX_2$$

$$\text{(V, 29)} \qquad \Phi^{th} = AS_1X_1 + CS_2X_2 .$$

Damit ist die Art der Lösungen der Diffusionsgleichungen für das Reaktorcore festgelegt bis auf die Konstanten A und C, die wir aus den Übergangsbedingungen zwischen Core und Reflektor und schließlich aus den Randbedingungen des Reflektors bestimmen müssen. Bevor wir uns aber dem Reflektor zuwenden, soll noch die kritische Bedingung für den nach der Zweigruppentheorie berechneten Reaktor mit Reflektor abgeleitet werden. Wir erhalten sie, indem wir in der Gl. (V, 15) wieder den Δ-Operator durch $-B^2$ ersetzen. Es ergibt sich

$$[L^2 \tau B^4 + (L^2 + \tau) B^2 + 1] \Phi^s = k_\infty \Phi^s$$

und das wieder kann man schreiben

$$(L^2B^2 + 1)\ (\tau B^2 + 1) = k_\infty$$

oder

$$\text{(V, 30)} \qquad \frac{k_\infty}{(L^2 B^2 + 1)(\tau B^2 + 1)} = 1 .$$

In dieser Gl. (V, 30) erkennen wir unsere kritische Bedingung in der Näherungsform Gl. (II, 119) wieder, denn wenn wir

annehmen, daß L^2B^2 und τB^2 klein sind, so können wir wieder mit $L^2 + \tau = M^2$ die Gl. (V, 30) schreiben

$$\text{(V, 31)} \qquad \frac{k_\infty}{M^2 B^2 + 1} = 1 = k_{\text{eff}}.$$

B^2 ist dann der geometrische Krümmungsfaktor, wie wir ihn in der Eingruppentheorie verwendet hatten.

Es zeigt sich also, daß den Ausfluß schneller Neutronen die Eingruppentheorie etwas besser beschreibt, als die Zweigruppentheorie; denn in der ersteren war der Ausflußfaktor $e^{-B^2\tau}$ während hier der Ausfluß nur durch den Näherungswert $1 - B^2\tau = \frac{1}{1 + B^2\tau}$ gegeben ist. Das ist auch nicht verwunderlich; denn in der Eingruppentheorie hatten wir ja das Ausfließen der schnellen Neutronen während des kontinuierlichen Abbremsvorganges betrachtet, während wir jetzt den Abbremsvorgang ignorieren und das Fortdiffundieren der schnellen Neutronen einfach durch die Angabe der Größe τ gekennzeichnet haben. Der hierdurch entstandene Fehler ist jedoch nicht groß, weil im allgemeinen das $B^2\tau$ viel kleiner ist als eins, so daß die obige Näherung gerechtfertigt ist.

Wir betrachten nun die Diffusion der Neutronen beider Gruppen im Reflektor. Die Diffusionsgleichungen für den Reflektor unterscheiden sich von denen für das Core nur dadurch, daß der Quellterm für die schnellen Neutronen fortfällt. Sie lauten demnach, wenn man die den Reflektor kennzeichnenden Größen mit dem links oben angeschriebenen Index r bezeichnet, entsprechend den Gln. (V, 13) und (V, 14)

$$\text{(V, 32)} \qquad {}^rD^s \Delta\, {}^r\Phi^s - {}^r\Sigma^s\, {}^r\Phi^s = 0$$

$$\text{(V, 33)} \qquad {}^rD^{th} \Delta\, {}^r\Phi^{th} - {}^r\Sigma^{th}\, {}^r\Phi^{th} + {}^r\Sigma^s\, {}^r\Phi^s = 0\,.$$

Die Ergebnisse der vorangehenden Rechnung können wir übernehmen, wenn wir immer den Vermehrungsfaktor k_∞ gleich null setzen. Die Quadrate der Krümmungsfaktoren ${}^rB_1$ und ${}^rB_2$ werden dann nach den Gln. (V, 19) und (V, 20):

$$\text{(V, 34)} \qquad {}^rB_1^2 = -\frac{1}{{}^r\tau}$$

$$\text{(V, 35)} \qquad {}^rB_2^2 = -\frac{1}{{}^rL^2}\,.$$

Die Krümmungsfaktoren im Reflektor sind also beide imaginär, während im Core einer der beiden imaginär, der andere reell war. Den Gln. (V, 23) und (V, 24) entsprechen hier die Funktionen:

(V, 36) $$^r\Phi^s = FZ_1 + GZ_2$$

(V, 37) $$^r\Phi^{th} = F'Z_1 + G'Z_2 \, .$$

Den Gln. (V, 26) und (V, 27) entspricht unter Beachtung der Gln. (V, 34) und (V, 35):

(V, 38) $$\frac{^r\Phi^{th}}{^r\Phi^s} = \frac{F'}{F} = \frac{^rD^s}{\tau\, ^rD^{th}} \frac{1}{\frac{1}{^rL^2} - \frac{1}{^r\tau}} = S_3$$

(V, 39) $$\frac{^r\Phi^{th}}{^r\Phi^s} = \frac{G'}{G} = \infty \qquad \text{d.h. } G = 0 \, .$$

und den Gln. (V, 28) und (V, 29) für den Reflektor:

(V, 40) $$^r\Phi^s = FZ_1$$

(V, 41) $$^r\Phi^{th} = S_3 FZ_1 + G'Z_2 \, .$$

Nun bleiben nur noch die bisher freien Konstanten A, G, F und G' zu bestimmen. Sie werden durch die Übergangsbedingungen zwischen den Flüssen im Core und denen im Reflektor festgelegt. Wie bei der Reflektorberechnung nach der Eingruppentheorie [Gl. (V, 1) und (V, 2)] verlangen wir wieder die Stetigkeit der Flüsse an der Grenzfläche zwischen Reflektor und Core und die der Diffusionsstromdichte. Das heißt in diesem Falle:

(V, 42) $$\left\{\begin{aligned} AX_1 + CX_2 - FZ_1 &= 0 \\ S_1AX_1 + S_2CX_2 - S_3FZ_1 - G'Z_2 &= 0 \\ D^sAX_1' + D^sCX_2' - {}^rD^sFZ_1' &= 0 \\ D^{th}S_1AX_1 + D^{th}S_2CX_2' - {}^rD^{th}S_3FZ_1' - {}^rD^{th}G'Z_2' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Das sind vier homogene Gleichungen für die Unbekannten A, C, F und G'. In den Funktionen X_1, X_2, Z_1, Z_2 ist der geometrische Ort der Grenzfläche zwischen Core und Reflektor einzusetzen. Die gestrichenen Funktionen bedeuten die Gradienten, also

Ableitungen nach dem Ort. Die Gln. (V, 42) können nebeneinander nur bestehen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\text{(V, 43)}\qquad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & -Z_1 & 0 \\ S_1X_1 & S_2X_2 & -S_3Z_1 & -Z_2 \\ D^sX_1' & D^sX_2' & -{}^rD^sZ_1' & 0 \\ D^{th}S_1X_1 & D^{th}S_2X_2' & -{}^rD^{th}S_3Z_1' & -{}^rD^{th}Z_2' \end{vmatrix} = 0\,.$$

In den Elementen dieser Determinante sind nur Materialkonstanten und der Radius bzw. die Größe des Cores enthalten. Die Gl. (V, 43) ist somit eine Gleichung zur Bestimmung der Coregröße. Verwunderlich erscheint, daß für die Größe des Cores offenbar die Randbedingung, daß die Neutronenflüsse am Außenrand des Reflektors verschwinden müssen, keine Rolle spielt. In Wirklichkeit aber ist diese Randbedingung mit der kritischen Bedingung Gl. (V, 30) verkoppelt, durch die der Krümmungsfaktor als eine Materialeigenschaft gegeben war. In der Gl. (V, 43) legt dieser materielle Krümmungsfaktor die Geometrie des Reaktors fest, indem er vorschreibt, wo die beiden Flüsse ${}^r\Phi^s$ und ${}^r\Phi^{th}$ verschwinden. Dadurch ist auch die Größe des ganzen Reaktors gegeben.

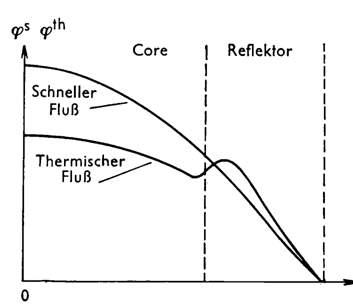


Abb. V,2. Die Ortsverteilung des schnellen und des thermischen Flusses im Reaktor mit Reflektor. Die gestrichelten Geraden kennzeichnen die Begrenzungsflächen des Reflektors

Ist die durch die Gl. (V, 43) implizit gegebene Größe des Cores festgelegt, so kann man von den Konstanten A, C, F und G' drei aus den Gln. (V, 42) berechnen, die vierte bleibt frei als Amplitude einer der Flüsse, zweckmäßigerweise des thermischen. Die Abb. (V, 2) zeigt die Flußverteilung des thermischen und des schnellen Flusses. Man sieht die Abflachung des thermischen Flusses im Core gegenüber einem Reaktor ohne Reflektor. Auffällig ist ferner, daß der thermische Fluß im Reflektor ein

Maximum hat. Das kommt daher, daß beiderseits der Grenzfläche zwischen Core und Reflektor schnelle Neutronen abgebremst werden zu thermischen. Aber nur auf der Coreseite werden sie stark absorbiert.

Auf ähnliche Weise kann man auch mit mehr als zwei Neutronengruppen rechnen. Es ist jedoch zweckmäßig, sich dazu der Matrizenschreibweise zu bedienen, was hier nicht durchgeführt werden soll.

2. Behandlung eines zentralen Regelstabes mit der Zweigruppentheorie

Die Berechnung des Einflusses der Regelstäbe im Reaktor ist im allgemeinen nur unter großem mathematischen Aufwand möglich. Die Gründe dafür sind zum Teil die gleichen, die als Hauptschwierigkeiten bei der Reflektorberechnung nach der Mehrgruppentheorie genannt wurden. Hinzu kommt hier, daß die Regelstäbe im allgemeinen nicht im Zentrum des Reaktors angebracht sind. Das erfordert die Zuhilfenahme von Funktionen, die nicht rotationssymmetrisch sind, sondern eine Abhängigkeit vom Azimutalwinkel enthalten. Man verwendet dafür zweckmäßigerweise Fourierreihen, deren Elementenfunktionen Besselfunktionen sind. Es kann jedoch darauf hier nicht eingegangen werden. Es soll aber doch, um das Prinzip der Behandlung von Regelstäben zu zeigen, ein sehr vereinfachter Fall durchgerechnet werden, ein Regelstab, der in der Mittelachse eines zylindrischen Reaktors angebracht ist. Wir verwenden dabei die Zweigruppentheorie. Zwar läßt sich der zentrale Regelstab auch nach der Eingruppentheorie behandeln, aber die Ergebnisse entsprechen so wenig der Wirklichkeit, daß diese Rechnung nicht recht lohnend erscheint.

Wir nehmen an, daß der zentrale Regelstab vollständig in das Core eintaucht, so daß die normale Flußverteilung in der Achsialrichtung des Cores durch den Stab nicht gestört wird. Sie behält also die in der Gl. (II, 134) angegebene Form. Dieser achsiale Anteil ist, abgesehen von der Amplitude Z_0, für den schnellen, wie auch für den thermischen Fluß jeweils der gleiche. Wir denken uns ihn bei der folgenden Rechnung bereits abgespalten und

rechnen nur mehr gemäß der ersten der Gl. (II, 133) mit dem radialen Anteil der Flußfunktionen:

$$\Delta R(r) + C^2 R = 0. \tag{V, 44}$$

Wieder, wie bei der Reflektorberechnung in den Gln. (V, 17), (V, 18) und (V, 21), (V, 22), genügt sowohl der schnelle, wie auch der thermische Fluß dieser Gl. (V, 44), wenn C^2 einen der beiden möglichen Werte

$$C_1^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4(k_\infty - 1)}{L^2\tau}}\right]^1 \tag{V, 45}$$

$$C_2^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4(k_\infty - 1)}{L^2\tau}}\right] \tag{V, 46}$$

gemäß den Gln. (V, 19) und (V, 20) hat.

Die beiden Lösungen X_1 und X_2 der Diffusionsgleichung im Core Gln. (V, 23) und (V, 24) lauten hier im rotationssymmetrischen Falle*

$$X_1 = J_0(C_1 r) + F N_0(C_1 r) \tag{V, 47}$$

$$X_2 = E I_0(iC_2 r) + K_0(iC_2 r). \tag{V, 48}$$

Die Konstanten E und F sind willkürlich und müssen noch bestimmt werden. i ist die imaginäre Einheit. Der Krümmungsfaktor C_2 ist, wie auch im Abschnitt (V, 1) der Krümmungsfaktor B_2, imaginär, so daß die Argumente aller Zylinderfunktionen in den Gln. (V, 47) und (V, 48) reell sind. Die beiden Funktionen N_0 und K_0 haben bei $r = 0$ eine Unendlichkeitsstelle und waren deshalb für unsere bisher angestellten Berechnungen nicht verwendbar. Jetzt aber müssen wir die Randbedingung erfüllen, daß der thermische Fluß im Bereich des Regelstabes verschwindet. Deshalb müssen wir diese Funktionen hinzunehmen.

Am äußeren Rand des Cores bei $r = r_1$ soll der schnelle, wie auch der thermische Fluß verschwinden. Daraus ergeben sich die Konstanten A und E, und es wird aus den Gln. (V, 47) und (V, 48)

$$X_1 = J_0(C_1 r) - \frac{J_0(C_1 r_1)}{N_0(C_1 r_1)} N_0(C_1 r) \tag{V, 49}$$

$$X_2 = K_0(iC_2 r) - \frac{K_0(iC_2 r_1)}{I_0(iC_2 r_1)} I_0(iC_2 r). \tag{V, 50}$$

---

[1] Die Indizierung der Buchstaben entspricht der im Abschnitt V, 1.

Das Ziel dieser Rechnung ist, die durch das Einfahren des Regelstabes bewirkte Änderung des materiellen Krümmungsfaktors C_1 in der Gl. (II, 133) zu berechnen. Wir gehen so vor, daß wir diese Änderung schon jetzt als Unbekannte in die Rechnung einführen und sie dann aus einer Randbedingung im Regelstab berechnen.
Es wird angenommen, daß sich der Krümmungsfaktor C_1 durch das Einfahren der Regelstäbe nur wenig, um einen Betrag δ ändert. Wir schreiben

(V, 51) $$C_1 = C_{10} + \delta$$

worin C_{10} der Krümmungsfaktor des Reaktors ohne Regelstab ist. Mit dieser Annahme wird die Funktion $J_0(C_1 r_1)$:

(V, 52) $$\begin{aligned} J_0(C_1 r_1) &= J_0(C_{10} r_1 + \delta \cdot r_1) \\ &= J_0(C_{10} r_1) + \frac{d}{d(C_{10} r_1)} J_0(C_{10} r_1)\, \delta \cdot r_1 \\ &= J_0(C_{10} r_1) - J_1(C_{10} r_1)\, \delta \cdot r_1 . \end{aligned}$$

$J_1(C_{10} r_1)$ ist die Besselfunktion erster Ordnung, genommen an der Stelle $C_{10} r_1$. An dieser Stelle ist aber, da C_{10} der Krümmungsfaktor des Reaktors ohne Regelstab sein sollte, $J_0(C_{10} r_1)$ gleich null. Die J_1-Funktion hat an der Stelle, wo die J_0-Funktion eine Nullstelle hat, den Wert $J_1(C_{10} r_1) = 0{,}519$. Es wird also:

(V, 53) $$J_0(C_1 r_1) = -\,0{,}519 \cdot \delta \cdot r_1 .$$

Die Neumannsche Funktion N_0 ändert sich an der Stelle $C_{10} r_1$ praktisch nicht:

(V, 54) $$N_0(C_1 r_1) = N_0(C_{10} r_1) = 0{,}510 .$$

Aus der Gl. (V, 49) wird mit den Gln. (V, 53) und (V, 54):

$$X_1 = J_0(C_1 r) + \frac{0{,}519}{0{,}510}\, \delta \cdot r_1 N_0(C_1 r)$$

oder mit der Gl. (II, 137):

(V, 55) $$X_1 = J_0(C_1 r) + 2{,}44\, \frac{\delta}{C_{10}} N_0(C_1 r) .$$

Die Funktion X_2 hängt, wenn wir uns nur für kleine Werte von r, d. h. für die nähere Umgebung des Regelstabes interessieren,

kaum von den Randbedingungen an der Coreoberfläche ab, weil der zweite Summand in der Gl. (V, 50) sehr klein wird gegenüber dem ersten. Wir können also für die Gl. (V, 50) schreiben:

(V, 56) $$X_2 = K_0(iC_2 r) \qquad \text{für kleine } r.$$

Durch Zusammensetzen der Lösungen X_1 und X_2 zur allgemeinen Lösung gewinnen wir, ähnlich wie in den Gl. (V, 28) und (V, 29) für den Radialanteil des schnellen und des langsamen Flusses im Core

(V, 57) $$R^s = X_1 + AX_2 = J_0(C_1 r) + 2{,}44 \frac{\delta}{C_{10}} N_0(C_1 r) + AK_0(iC_2 r)$$

(V, 58) $$R^{th} = S_1 X_1 + S_2 A X_2 = S_1 \left[J_0(C_1 r) + 2{,}44 \frac{\delta}{C_{10}} N_0(C_1 r) \right] + S_2 A K_0(iC_2 r).$$

Die Amplitude der Funktion X_1 haben wir, da sie im weiteren nicht interessiert, fortgelassen. Die Kopplungsfaktoren S_1 und S_2 entsprechen den Gl. (V, 26) und (V, 27):

(V, 59) $$S_1 = \frac{D^s}{\tau D^{th}} \frac{1}{\frac{1}{L^2} + C_1^2}$$

(V, 60) $$S_2 = \frac{D^s}{\tau D^{th}} \frac{1}{\frac{1}{L^2} + C_2^2}.$$

Die Krümmungsfaktoren C_1 und C_2 erhalten wir aus den Gln. (V, 45) und (V, 46), wobei wir noch annehmen wollen, daß in den Wurzeln der zweite Summand jeweils klein ist gegenüber dem ersten. Dann ist:

$$C_1^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + \tau}$$

$$C_2^2 = -\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right).$$

Die Kopplungsfaktoren werden damit:

(V, 61) $$S_1 = \frac{D_s}{D^{th}} \frac{L^2}{\tau}$$

(V, 62) $$S_2 = -\frac{D^s}{D^{th}}.$$

Nun sind noch die Größen A und δ aus den beiden Randbedingungen am Regelstab für den schnellen und für den thermischen Fluß zu bestimmen.

Das Material der Regelstäbe, z. B. Cadmium oder Borstahl, hat die Eigenschaft, thermische Neutronen stark zu absorbieren, während schnelle Neutronen nur in verschwindend geringem Maße eingefangen werden. Wir werden deshalb die Randbedingungen an der Oberfläche des Regelstabes so wählen, daß der schnelle Fluß im Core durch den Stab nicht beeinträchtigt wird. Das heißt, da sich die Staboberfläche praktisch in der Mitte des Reaktors befindet:

$$\text{(V, 63)} \qquad \frac{d\,\mathrm{R}^s(r'')}{dr} = 0\,.$$

r'' ist der Radius des Regelstabes. Die thermischen Neutronen sollen jedoch durch den Stab so gut absorbiert werden, daß wir annehmen können, daß der thermische Fluß bereits an der Staboberfläche absorbiert wird. Es ist also

$$\text{(V, 64)} \qquad R^{th}(r'') = 0\,.$$

[Genau genommen dürfen wir hier nicht den Fluß an der Oberfläche des Stabes gleich null setzen, sondern an der Stelle $r'' - d$, worin d die dem Corematerial eigene extrapolierte Länge nach der Gl. (V, 1) ist.]

Aus den Gln. (V, 57) und (V, 63) folgt:

$$\text{(V, 65)} \quad 0 = C_1 J_1(C_1 r'') + 2{,}44 \frac{\delta}{C_{10}} \frac{d}{dr} N_0(C_1 r'') + A \frac{d}{dr} K_0(iC_2 r)\,.$$

Für kleine Werte von r kann man für $K_0(iC_2 r)$ eine Näherungsformel angeben:

$$\text{(V, 66)} \qquad K_0(iC_2 r) = 0{,}116 + \ln \frac{1}{iC_2 r}$$

und für $N_0(C_1 r)$:

$$\text{(V, 67)} \qquad N_0(C_1 r) = -\frac{2}{\pi}\left(0{,}116 + \ln \frac{1}{C_1 r}\right).$$

Die Funktion $J_1(C_1 r'')$ können wir neben den anderen Summanden in der Gl. (V, 65) vernachlässigen.

Mit $\frac{d}{dr} K_0(iC_2 r'') = \frac{1}{r''}$ und $\frac{d}{dr} N_0(C r'') = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{r''}$
aus den Gln. (V, 66) und (V, 67) gewinnen wir aus der Gl. (V, 65):

$$A = \frac{2}{\pi} \cdot 2{,}44 \frac{\delta}{C_{10}}\,. \tag{V, 68}$$

Nun ist noch die Randbedingung Gl. (V, 64) zur Bestimmung der Änderung des Krümmungsfaktors C_1 auszuwerten. Aus der Gl. (V, 58) folgt unter Berücksichtigung der Gln. (V, 61), (V, 62) und (V, 68):

$$R^{th} = S_1 \left[J_0(C_1 r) + 2{,}44 \frac{\delta}{C_{10}} \left(N_0(C_1 r) - \frac{2}{\pi} \frac{\tau}{L^2} K_0(iC_2 r) \right) \right]. \tag{V, 69}$$

Da wir immer mit kleinen Werten von r rechnen, können wir wieder die Näherungsformeln (V, 66) und (V, 67) anwenden und außerdem die Funktion $J_0(C_1 r)$ gleich eins setzen. Mit der Randbedingung Gl. (V, 64) erhalten wir dann

$$0 = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot 2{,}44 \frac{\delta}{C_{10}} \left[0{,}116 + \ln \frac{1}{C_1 r''} + \frac{\tau}{L^2} \left(0{,}116 + \ln \frac{1}{iC_2 r''} \right) \right]$$

und daraus schließlich das gesuchte δ:

$$\frac{\delta}{C_{10}} = \frac{\pi}{4{,}88} \frac{1}{\left[0{,}116 + \ln \frac{1}{C_1 r''} + \frac{\tau}{L^2} \left(0{,}116 + \ln \frac{1}{iC_2 r''} \right) \right]}\,. \tag{V, 70}$$

Die Änderung δ/C_{10} des materiellen Krümmungsfaktors C_1 kann man nun natürlich noch unter Benutzung der kritischen Bedingung Gl. (II, 119) in die entsprechende Änderung des Vermehrungsfaktors k_∞ umrechnen.

Die Gl. (V, 70) zeigt, daß die Änderung des Krümmungsfaktors bei einem nicht allzu dünnen Regelstab nur verhältnismäßig wenig vom Durchmesser des Stabes abhängt. Entscheidend für die Wirksamkeit ist der vollkommene Einbruch des thermischen Flusses in der Achse des Reaktors. Demnach kann man die Wirksamkeit nicht wesentlich dadurch erhöhen, daß man den Stab dicker macht, auch nicht dadurch, daß man durch Unterteilung seine Oberfläche vergrößert. Man muß vielmehr dafür sorgen, daß die Regelstäbe — im allgemeinen werden ja mehrere verwendet — einen gewissen Abstand voneinander haben. Bringt

man sie jedoch zu weit in die Außenbereiche des Cores, so wird ihre Wirksamkeit wieder durch den dort kleineren Neutronenfluß herabgesetzt. Es gibt also ein Optimum für die Stellung der Regelstäbe im Reaktor. Hinzu kommt noch, daß der thermische Fluß zwar in der unmittelbaren Nähe jedes Stabes stark absinkt, in der weiteren Umgebung aber über das normale Maß ansteigt. Dadurch beeinflussen sich die Stäbe gegenseitig so, daß jeder Stab die Wirksamkeit aller anderen Stäbe erhöht.

Man sieht aus dieser letzten Bemerkung, daß es für eine Berechnung der Wirksamkeit mehrerer exzentrisch im Reaktor angebrachter Regelstäbe nicht genügt, die Wirksamkeit eines exzentrischen Stabes zu berechnen und das Ergebnis mit der Anzahl der Stäbe zu multiplizieren, um die Gesamtwirksamkeit aller Stäbe zu erhalten. Man muß die Kopplung der Stäbe untereinander auch berücksichtigen.

Solche Rechnungen sind, wie schon am Anfang gesagt wurde, recht umständlich, und man sieht, wie stark wir das Problem vereinfachen mußten, um es überhaupt einigermaßen übersehen zu können. Dabei sei noch auf eine Ungenauigkeit hingewiesen, die in unserer Rechnung enthalten ist. Wir haben es immer als selbstverständlich angenommen, daß man mit der Neutronendiffusionstheorie rechnet. Das ist in Wirklichkeit nur erlaubt, wenn der Durchmesser des Stabes groß ist gegenüber der mittleren freien Weglänge der Neutronen im Corematerial. Im anderen Falle muß man mit der Transporttheorie der Neutronen rechnen, die aber erst im zweiten Band besprochen werden soll.

Glücklicherweise braucht man die sehr komplizierte Theorie der Regelstäbe im allgemeinen nicht durchzurechnen, weil es meistens nur darum geht die maximale Wirksamkeit abzuschätzen.

LITERATURVERZEICHNIS

W. Riezler, Einführung in die Kernphysik. Oldenbourg, München

W, Riezler u. W. Walcher, Kerntechnik. Teubner, Stuttgart

F. Cap, Physik und Technik der Atomreaktoren. Springer, Wien

S. Glasstone, M. Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theory. MacMillan, London

R. L. Murray, Nuclear Reactor Physics. Prentice-Hall Englewood Cliffs N.Y.

S. Glasstone, Principles of Nuclear Reactor Engineering. Van Nostrand Company, New York, Toronto, London

J. Dietrich, W. Zinn, Solid Fuel Reactors. Addison-Wesley Publishing Company, Reading/Mass.

H. Bethe, Ph. Morrison, Elementary Nuclear Theory. John Wiley New York Chapman & Hall, London

R. A. Charpie, D. J. Littler, Progress in Nuclear Energy. Pergamon Press, London

Horst Teichmann, Einführung in die Atomphysik. Bibliographisches Institut AG, Mannheim

A—W Series in Nuclear Science and Engineering.
Addison-Wesley Publishing Company Cambridge 42, Mass.

Selected Reference Material on Atomic Energy.
United States Atomic Energy Commission McGraw-Hill, New York, Toronto, London

SACH- UND NAMENREGISTER

Absorptionsquerschnitt 30, 45, 100, 117, 142
α-Teilchen 20, 26
Atomgewicht 11
Atomkern 10
Atommodell 9
Atomreaktor 35
Ausfluß 38, 58, 62

B-Faktor 63, 89, 105, 109, 111, 131, 147, 156
Barn 52
β-Strahlung 26
Bindungsenergie 15
Bremsdichte (q) 56, 74, 105
Bremsnutzung 31
Bremstheorie 45, 64, 73, 83
Brennstoffstäbe 36
Brutfaktor 41
Brutreaktor 44
Brüten 33, 40

Calder-Hall-Reaktor 42
Canning 36
Core 38

Δ-Operator 59, 61
Deuterium 13
Deuteron 13
Diffusionsgleichung 59, 61
Diffusionskonstante 59, 83, 90
Diffusionslänge 107, 119, 148
Diffusionsstromdichte 48, 57
Diffusionstheorie 45, 54, 104
Diffusionstheorie im Abbremsbereich 83
Disadvantage-Faktor 138, 141
Druckwasserreaktor 35

Einfang (Neutronen) 28
Eingruppentheorie 55, 150
Einsteinsche Formel ($E = mc^2$) 23
Elektronenvolt 13, 23
Elementarladung 10
Energie, thermische 22
Energieeinheiten 23, 24
Energieverlust (mittlerer log.) 71, 73, 78
ε-Faktor 103, 105, 135, 144
Erg 24
η-Faktor 102, 105
η-Faktor(im heterogenen Reaktor) 136, 147
Extrapolationslänge 149

f-Faktor 102, 105
f-Faktor (im heterogenen Reaktor) 134, 136
Fermialter 87, 105, 148

Fermische Bremstheorie 54
Flüssigkeitsreaktor 42
Flüssig-Metall-Reaktor 43

γ-Strahlung 26
Gewichtsfaktor 124
(Stat. Gewicht)
Giftstoffe 38, 40
Graphit 34, 40
Graphitreaktor 41
Gruppenkonstante 141, 153

Halbwertszeit 28

Isotopie 12

k-Faktor 104, 105, 147
k-Faktor (effektiv) 107
Kernenergie 14
Kernkräfte 14
Kernspaltung 21
Kettenreaktion 39
Konversion 40
Konversionsfaktor 41
Kopplungsfaktoren 157
Kritische Bedingung 107, 115, 157
Krümmungsfaktor 63, 89, 105, 109, 111, 122, 131, 147, 156
Kubischer Zylinder 114
Kugelreaktor 112

Laborsystem 66

Massenwert 11
Massenzahl 11
Mehrgruppentheorie 55
Moderator 34, 37
Moderatorgüte 73
Moderatorverhältnis 100
Moderatorwert 73

Natrium-Graphit-Reaktor 43
Nichtausflußfaktor 81, 83, 90, 105
Neptunium 32
Neutronen 10
Neutronen (langsame) 21
Neutronenausfluß 38, 58, 62
Neutronenbremsung 34
Neutroneneinfang 28
Neutronenfluß 51
Neutronenmasse 11
Neutronenspaltung 25
Neutronenstreuung 33
Neutronenstromdichte 48
Neutronen, thermische 22
Neutronen, verzögerte 25
Neutronenzyklus 37, 97
Nukleonen 10
Nukleonkraft 15
ν-Faktor 97, 105

Oberflächenabsorption 135, 142
Organisch-moderierter Reaktor 44

p-Faktor 31, 81, 98, 105, 134, 141
Paarerzeugung 27
Plancksches Wirkungsquantum 9
Plutonium 32, 44, 133
Protaktinium 33
Protonen 10
Protonenmasse 11

Quellneutronen 55, 64
Quellterm (für thermische Neutronen) 56, 104

Radioaktivität 25
Reaktivität 107
Reaktor 35
Reaktorcore 38
Reaktor, gasgekühlt 41
Reaktor, heterogen 39, 64, 133
Reaktor, homogen 39, 42, 116
Reaktor (schneller) 45
Reflektor 38, 149
Reflektorersparnis 150
Regelstäbe 36, 38, 161
Resonanzabsorptionsquerschnitt, effektiv 100, 142
Resonanzeinfang 29
Resonanzentkommwahrscheinlichkeit 31, 81, 98, 105, 134, 141
Resonanzgebiet 31
Resonanzintegral 100
Rutherfordsches Atommodell 9

Schwerpunktsystem 66
Siedewasserreaktor 41
Spaltprodukte 25
Spaltung 21
Spaltungsneutronen 25
Strahlung, radioaktive 25
Streuung 33

τ-Wert 87, 105, 148
Temperatureffekt 126
Thermischer Energiebereich 22, 31
Thermischer Reaktor 33
Thorium 31, 33
Transportweglänge 95
Tritium 13

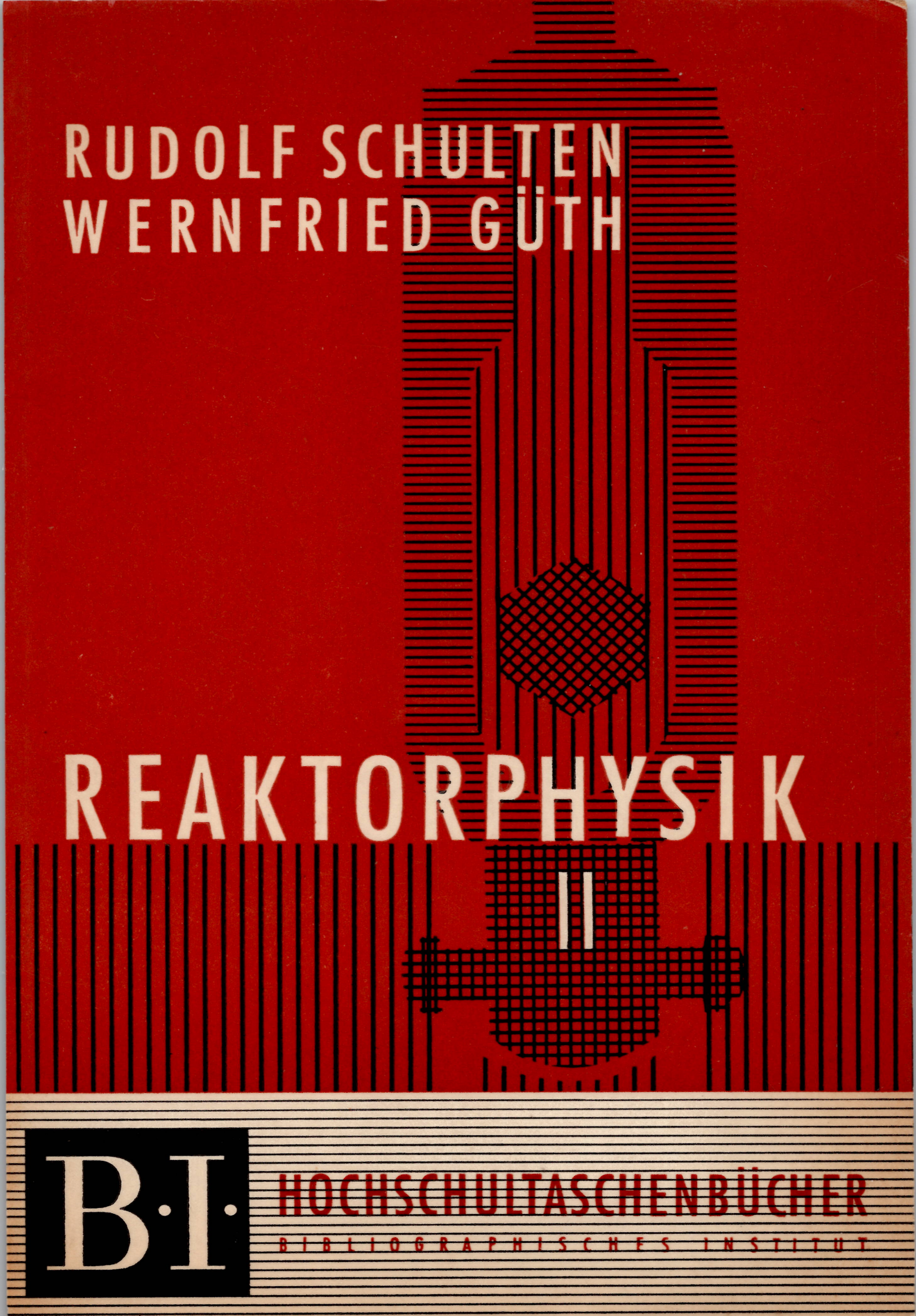
Uran-233 33
Uran-235 21
Uran-238 31
Uran-239 32
Uran-240 32
Uran, angereichertes 32, 40
Uran, natürliches 32

Vermehrungsfaktor (effektiv) 107
Vermehrungsfaktor (k_∞) 104, 105, 147
Verzögerte Neutronen 25
Vierfaktorenformel 97
Volumenabsorption 135, 141

Wasser (schweres) 34, 40
Wanderungslänge (M) 108
Wärmetauscher 36
Weglänge, mittl. fr. 50
Wirkungsquerschnitt 30, 45, 117

ξ-Wert 71, 73, 78

Zelle 134, 136
Zerstrahlung 27
Zweiggruppentheorie 149, 152, 161
Zylinder, kubischer 114
Zylinderreaktor 112


RUDOLF SCHULTEN
WERNFRIED GÜTH
REAKTORPHYSIK
II
B·I·
HOCHSCHULTASCHENBÜCHER
BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT

B·I-HOCHSCHULTASCHENBÜCHER

BAND 11

REAKTORPHYSIK

VON

RUDOLF SCHULTEN UND WERNFRIED GÜTH

Arbeitsgemeinschaft BBC-Krupp
für Kernenergie-Anlagen

ZWEITER BAND

DER REAKTOR
IM NICHTSTATIONÄREN BETRIEB

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM

Bibliographisches Institut AG · Mannheim 1962
Gesamtherstellung: Klambt-Druck GmbH, Speyer
(Satz und Druck: Zechnersche Buchdruckerei, Speyer)
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

ZEITLICHES VERHALTEN VON REAKTOREN

Kapitel I. **Das kinetische Verhalten von Reaktoren** 7
I. 1 Der zeitliche Ablauf der Kettenreaktion 7
I. 2 Das kinetische Verhalten der Reaktoren, beschrieben mit einer Neutronengruppe 8
I. 3 Das kinetische Verhalten von Reaktoren, dargestellt mit zwei Neutronengruppen 10
I. 4 Das kinetische Verhalten eines Reaktors bei Berücksichtigung von 6 Neutronengruppen 19

Kapitel II. **Der Temperatureinfluß auf die Reaktorkinetik** . . . 23
II. 1 Der Einfluß des Temperaturkoeffizienten 23
II. 2 Langsame Veränderungen 26
II. 3 Schnelles Abschalten der Wärmeübertragung . . 33
II. 4 Prompt-kritischer Fall 37
II. 5 Konzentrationsänderungen der Wärmeübertragungsmittel 41

Kapitel III. **Die Vergiftung eines Reaktors** 43

Kapitel IV. **Brut- und Konversionsfragen** 50
IV. 1 Brut- und Konversionsfragen 50
IV. 2 Einfluß der Brut- und Spaltstoffkonzentration auf den Brut- bzw. Konversionsprozeß 54
IV. 3 Konversionsvorgänge bei natürlichem und bei angereichertem Uran 64
IV. 4 Der Einfluß der Isotope mit hoher Massenzahl, die bei Brut- und Konversionsprozessen entstehen, auf den Neutronenhaushalt 76

Kapitel V. **Die Wärmeeigenschaften eines Reaktors in Abhängigkeit vom Neutronenfluß** 87

DIE MATHEMATISCHEN GRUNDLAGEN DER REAKTORPHYSIK

Kapitel VI. **Vektoranalysis** 97
VI. 1 Vektoren und Matrizen 97
VI. 2 Vektoranalysis 104

Kapitel VII. **Fouriersche Reihen-, Integrale-, Zylinder- und Kugelfunktionen** 122

Kapitel VIII. **Operatoren und Matrizen** 146

ZEITLICHES VERHALTEN VON REAKTOREN

I. Das kinetische Verhalten eines Reaktors

1. Der zeitliche Ablauf der Kettenreaktion

Die in Band I beschriebene Kettenreaktion soll im folgenden in bezug auf ihr zeitliches Verhalten untersucht werden. In Formel (II, 118) Bd. I ist festgestellt worden, daß die Anzahl der Neutronen immer stärker anschwillt, wenn der effektive Vermehrungsfaktor k_{eff} durch die zyklische Kettenreaktion den Wert 1 überschreitet. Umgekehrt vermindert sich die Anzahl der Neutronen, wenn dieser Wert unter 1 liegt. Die Kettenreaktion ist nur dann stationär, d. h. die Anzahl der Neutronen bleibt nur dann konstant, wenn die effektive Vermehrungszahl genau gleich 1 ist.

Jedes Neutron hat eine gewisse Lebensdauer, beginnend mit seiner Erzeugung bei der Uranspaltung und endend, wenn es seinerseits absorbiert wird und eventuell wieder eine neue Spaltung verursacht. Dazwischen liegt die Zeit, während der das Neutron durch den Moderator abgebremst wird und noch eine Weile als thermisches Neutron existiert. Die Lebenszeit eines Neutrons ist vor allem abhängig von der Moderatorkonzentration des Reaktors und beträgt etwa 10^{-3} bis 10^{-4} sec, wobei die Abbremszeit selbst nur etwa ein Zehntel der Gesamtlebensdauer als thermisches Neutron beträgt und der Zeitraum für den Spaltungsvorgang etwa 10^{-17} sec beträgt.

Glücklicherweise bestimmen diese verhältnismäßig kurzen Spannen im allgemeinen nicht das zeitliche Verhalten eines Reaktors, sondern ein Teil der Neutronen (etwa 0,3 bis 0,7% – je nach Art des Spaltstoffes) wird als sogenannte verspätete Neutronen erzeugt, und das arithmetische Mittel über die Lebensdauer der mehr als 99% prompten Neutronen und der wenigen verspäteten Neutronen beträgt etwa 10^{-1} sec, wodurch die Steuerung der Reaktoren technisch möglich ist.

Im folgenden wollen wir uns mit den für die Regelbarkeit der Reaktoren so wichtigen verspäteten Neutronen befassen.

Diese werden von den Spaltbruchstücken erst emittiert, wenn sie bereits ein Lebensalter erreicht haben, das groß ist gegenüber der Spaltzeit. Die Atomkerne dieser Spaltbruchstücke befinden sich nämlich auf Grund von überschüssiger Energie in einem stark angeregten Zustand. Diese An-

regungsenergie würde ausreichen, ein Neutron aus dem Atomkern zu entlassen, wenn nicht gewisse durch die Quantenmechanik zu erklärende Erhaltungsgesetze erfüllt sein müßten, die die unmittelbare Aussendung eines Neutrons verbieten. Dieses Verbot wird durch die Emission eines oder mehrerer Elektronen (β-Strahlung) umgangen, nach deren Entlassung auch ein Neutron ausgesendet werden kann. Die Wartezeit für die Aussendung eines Elektrons bzw. die Halbwertszeit des jeweiligen Zerfalls entspricht also der Verspätungszeit eines Neutrons.

In den Tabellen I, II und III sind die Anteile der verspäteten Neutronen mit ihren Verspätungszeiten und den zugehörigen Zerfallskonstanten für Uran 235, Uran 233 und Plutonium 239 aufgezeichnet.

Außer den angeführten Neutronengruppen gibt es noch andere Gruppen von verspäteten Neutronen (kürzere oder längere Zerfallszeiten), die aber wegen ihrer geringen Häufigkeit experimentell nicht nachweisbar und daher auch technisch uninteressant sind.

In Reaktoren, mit schwerem Wasser als Moderator, treten noch andere Gruppen von verspäteten Neutronen auf. Nach ähnlichen Gesetzen der Quantenmechanik, wie sie für die oben behandelte Verknüpfung zwischen β-Strahlung und Neutronenemission gelten, werden hier zuerst außer den Elektronen zusätzlich Gammaquanten ausgesendet, die ihrerseits durch Photoeffekt aus den Atomkernen des schweren Wassers Neutronen herausschlagen können.

Wir wollen uns noch einmal vergegenwärtigen, daß das arithmetische Mittel der Generationsdauer aller Neutronen im Reaktor etwa 0,1 sec beträgt, wobei die kurze Abbremszeit und die Lebensdauer als thermisches Neutron praktisch keine Rolle spielt. Für manche qualitative Betrachtung, vor allem langsamer Veränderungen im Reaktor, ist es also völlig ausreichend, das zeitliche Verhalten der Reaktoren mit Differentialgleichungen für nur eine Neutronengruppe mit der mittleren Lebensdauer von 0,1 sec zu beschreiben. Die bisher gemachten Bemerkungen gelten sowohl für thermische als auch für schnelle Reaktoren.

2. *Das kinetische Verhalten der Reaktoren, beschrieben mit einer Neutronengruppe*

Wir erläutern die Grundvorgänge beim zeitlichen Ablauf der Kettenreaktion anhand der einfachsten Darstellung mit der Eingruppentheorie.

In einem Reaktor herrsche der Neutronenfluß Φ, der makroskopische Absorptionsquerschnitt sei Σ_a, dann ist die Anzahl der absorbierten Neutronen pro Kubikzentimeter und Sekunde gleich $\Phi \cdot \Sigma_a$.

Arbeitet der Reaktor mit einer Multiplikationskonstante k_{eff}, dann ist die Änderung der Neutronendichte:

$$\frac{dn}{dt} = (k_{eff} - 1)\, \Sigma_a \cdot \Phi. \tag{I, 1}$$

Wir wollen auch die linke Seite auf den Neutronenfluß beziehen und multiplizieren deswegen die ganze Gleichung mit der Neutronengeschwindigkeit v. Die Neutronengeschwindigkeit v darf unter das Differential einbezogen werden, da sie zeitlich nicht veränderlich ist. Es ergibt sich so für die Änderung des Neutronenflusses:

$$\frac{d\Phi}{dt} = (k_{eff} - 1)\, \Sigma_a \cdot v \cdot \Phi. \tag{I, 2}$$

Die Lösung dieser einfachen Differentialgleichung ist:

$$\Phi = \Phi_0 \exp (k_{eff} - 1)\, \Sigma_a \cdot v \cdot t. \tag{I, 3}$$

Wir haben dabei vorausgesetzt, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ der Neutronenfluß den Wert Φ_0 hat.

Wir führen jetzt noch folgende Zeitkonstante ein:

$$\Sigma_a \cdot v = \frac{1}{\bar{t}}. \tag{I, 4}$$

Mit der Zeit $\bar{t}$ meinen wir die mittlere Absorptionszeit der Neutronen. Genau genommen müßten wir noch die Abbremszeit hinzuzählen, die aber so klein ist, daß wir sie vernachlässigen wollen, zumal nur mit einer Neutronengruppe gerechnet wird. Die Bedeutung des Vermehrungsfaktors k_{eff} ist bereits in Band I und eingangs des ersten Kapitels dieses Bandes dargetan worden. Wir führen jetzt δk die Reaktivität

$$\delta k = (k_{eff} - 1) \tag{I, 5}$$

ein, die uns das Wachstumsgesetz des Neutronenflusses in einfachster Form gibt:

$$\Phi = \Phi_0 \exp \delta k\, \Sigma_a \cdot v \cdot t = \Phi_0 \exp \left(\delta k \cdot \frac{t}{\bar{t}}\right). \tag{I, 6}$$

Diese Formel gibt recht anschaulich das zeitliche Verhalten der Reaktoren wieder, wie einige nachfolgende Zahlenbeispiele zeigen.

Angenommen: $\delta k = 0{,}001$, d. h. in jedem Zyklus der Kettenreaktion wird ein Promille Neutronen zu viel erzeugt, dann ergibt sich bei einer mittleren Lebensdauer $t = 0{,}1$ sec nach $t = 100$ sec ein Neutronenfluß $\Phi = e\ (\approx 2{,}7) \cdot \Phi_0$; nach $t = 230$ sec hat sich der Neutronenfluß annähernd um das zehnfache vermehrt. In solchen Zeiträumen läßt sich eine technische Regelung gut durchführen. Nehmen wir dagegen einmal an, daß $\delta_k = -0{,}001$ ist, so ergibt sich, daß nach 230 sec der Neutronenfluß auf etwa ein Zehntel gesunken ist. Erhöhen wir die Reaktivität δ_k auf 0,01, so zeigt sich schon ein beängstigender Anstieg des Neutronenflusses in der kurzen Zeit von 20 sec.

Diese Zahlenbeispiele zeigen allerdings nur im ersten Fall ein Bild, das der Wirklichkeit annähernd entspricht. Eine genauere Darstellung erhält man, wenn man zwei oder mehrere Neutronengruppen berücksichtigt.

3. *Das kinetische Verhalten von Reaktoren, dargestellt mit zwei Neutronengruppen*

Wir bedienen uns jetzt einer Darstellungsweise, bei der die im Reaktor befindlichen Neutronen in zwei Gruppen eingeteilt werden: die prompten Neutronen und die verspäteten Neutronen. Der Bruchteil der verspäteten Neutronen sei β und ihre mittlere Lebensdauer möge τ sein. Ist die Konzentration der verspäteten Neutronen N, dann werden pro Kubikzentimeter und Sekunde $\lambda \cdot N$ verspätete Neutronen entstehen. (λ ist die entsprechende Zerfallskonstante für die Entstehung verspäteten Neutronen.) Zur Erläuterung muß noch gesagt werden, daß die Anzahl N sich nicht auf die Zahl der freien verspäteten Neutronen bezieht, sondern auf alle noch in den Spaltprodukten gebundenen (sozusagen latenten) verspäteten Neutronen.

Die Multiplikationskonstante k_∞ (für ein unendlich ausgedehntes Medium, d. h. ohne Berücksichtigung der in Wirklichkeit immer aus dem Reaktor herausfließenden Neutronen) vermindert sich also um $k_\infty\ \beta$ zu $k_\infty\ (1-\beta)$. Ebenso ist k_{eff} um denselben Bruchteil verringert. Der Anteil der verspäteten Neutronen ist für die drei in Betracht kommenden Spaltstoffe verschieden und in nachfolgender Tabelle aufgezeichnet:

U^{233}	$\beta = 0{,}0027$
U^{235}	$\beta = 0{,}0064$
P^{239}	$\beta = 0{,}0021$

Da die verspäteten Neutronen wie die prompten Neutronen zunächst als schnelle Neutronen freiwerden, müssen sie, bevor sie als thermische Neutronen für den Neutronenhaushalt wirksam sein können, abgebremst werden. Dabei geht ein gewisser Teil durch Resonanzabsorption im umgebenden Medium verloren, und ein weiterer Bruchteil fließt als schnelle bzw. thermische Neutronen aus dem Reaktor aus.

Die Quelle der verspäteten Neutronen ist also nur noch:

$$Q_N = \lambda \cdot N \cdot P_s \cdot P_t \cdot p, \tag{I, 7}$$

wo: P_s = Ausflußfaktor für schnelle Neutronen,
P_t = Ausflußfaktor für thermische Neutronen,
p = Resonanzabsorptionsfaktor.

Hier wurde vorausgesetzt, daß die verspäteten Neutronen mit der gleichen Energie wie die prompten Neutronen erzeugt werden, was in Wirklichkeit nicht zutrifft. Die prompten Neutronen werden mit einer mittleren Energie von 2 MeV und die verspäteten mit 0,5 bis 1 MeV erzeugt. Trotzdem können wir für den Abbremsprozeß den gleichen Resonanzfaktor p und den gleichen Ausflußfaktor P_s sowohl für prompte als auch für verspätete Neutronen ansetzen, da die Abbremsung der Neutronen in dem höheren Energiebereich sehr rasch erfolgt und deshalb die verschiedenen Neutronenenergien zu den gleichen Verlusten durch Resonanzeinfang und Neutronenausfluß führen. Der Ausflußfaktor für thermische Neutronen ist für beide Arten ohnehin gleich.

Betrachten wir jetzt die zeitliche Veränderung der verspäteten Neutronen. Bei vorgegebenem Neutronenfluß Φ ist die Anzahl der Neutronen, die pro Kubikzentimeter und Sekunde absorbiert werden gleich: $\Sigma_a \Phi$, von denen f im Brennstoff absorbiert werden. Infolge der Absorption dieser $f \Sigma_a \Phi$ Neutronen pro cm³ sec im Brennstoff entstehen η schnelle Neutronen, die noch um den Spaltungsfaktor für schnelle Neutronen ε vermehrt werden. Von den so durch Absorption und nachfolgender Spaltung $\varepsilon\eta \cdot f \Sigma_a \Phi$ pro cm³ sec erzeugten Neutronen wird der Bruchteil β als latente Neutronen produziert. (Siehe Vierfaktorenformel Bd. I.) Andererseits werden pro cm³ sec nach dem Zerfallsgesetz der Radioaktivität $\lambda \cdot N$ Neutronen verloren. Die Gesamtbilanz der zeitlichen Veränderung der Konzentration an latenten Neutronen pro cm³ sec ergibt sich demnach aus der Gleichung:

$$\frac{dN}{dt} = \eta \cdot \varepsilon \cdot f \cdot \Sigma_a \cdot \Phi \cdot \beta - \lambda N. \tag{I, 8}$$

Nach der Vierfaktorenformel (siehe Bd. I) entspricht $\eta \cdot \varepsilon \cdot f = \frac{k_\infty}{p}$, so daß sich Gl. (I, 8) vereinfachen läßt zu:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k_\infty}{p} \cdot \Sigma_a \cdot \Phi \cdot \beta - \lambda N. \tag{I, 9}$$

Ehe wir diese Differentialgleichung in die Bilanz des Neutronenhaushaltes einsetzen, integrieren wir sie:

$$N = N_o \exp\left\{-\lambda t\right\} + \int_o^t dt_1 \exp\left\{-\lambda\ (t-t_1)\right\} \cdot \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \cdot \Phi \cdot \beta \tag{I, 10}$$

und prüfen diese Lösung durch Differenzieren und Einsetzen in (I, 9).

Um für die Endgleichung eine möglichst einfache Form zu erhalten, wird dieser Ausdruck – Gl. (I, 10) – durch partielle Integration weiter umgeformt. Wir benutzen dazu die bekannte Formel für die partielle Integration:

$$\int_o^t uv'dt_1 = u(t)\, v(t) - u(o) \cdot v(o) - \int_o^t vu'dt_1$$

von deren Gültigkeit man sich durch Differenzieren beider Seiten leicht überzeugen kann.

Wir substituieren:

$$u = \frac{\beta \cdot \Sigma_a \cdot k_\infty}{p} \Phi\ (t_1); \qquad v' = \exp\ \{-\lambda\,(t-t_1)\};$$

daraus ergibt sich:

$$u' = \frac{\beta\, \Sigma_a\, k_\infty}{p} \frac{d\,\Phi\,(t_1)}{dt}; \qquad v = \frac{1}{\lambda} \exp\ \{-\lambda\,(t-t_1)\}.$$

Als Resultat erhalten wir:

$$N = N_o\ e^{-\lambda t} + \frac{\beta \cdot k_\infty \cdot \Sigma_a}{p \cdot \lambda} \Phi\,(t) - \frac{\beta\, k_\infty\, \Sigma_a}{p \cdot \lambda} \Phi_0 \cdot e^{-\lambda t} -$$

$$- \frac{\beta\, k_\infty\, \Sigma_a}{p \cdot \lambda} \int_o^t dt_1\, e^{-\lambda\,(t-t_1)}\, \Phi'\,(t_1). \tag{I, 11}$$

(Das erste und dritte Glied hebt sich nach Gl. (I, 9) gegenseitig auf, da Φ_0 und N_0 dem stationären Fall zugeordnet sind.) Wir haben dabei vorausgesetzt, daß zum Ausgangszeitpunkt $t = 0$ stets ein stationärer Neutronenfluß Φ_0 und eine stationäre Konzentration N_0 der verspäteten Neutronen vorliegt. Diese Annahme ist keine Einschränkung unseres Gleichungssystems, da wir jeden zeitlichen Vorgang immer als von einem stationären Zustand ausgehend betrachten können.

Wir führen noch folgende Abkürzung ein:

$$\beta\, e^{-\lambda\,(t-t_1)} = D\,(t-t_1) \tag{I, 12}$$

und erhalten für die Konzentration der latenten Neutronen den Ausdruck:

$$N\,(t) = \frac{k_\infty \cdot \Sigma_a}{\lambda \cdot p} \left\{ \beta \cdot \Phi\,(t) - \int\limits_0^t dt_1\, D\,(t-t_1)\, \Phi'\,(_1) \right\}. \tag{I, 13}$$

Für die Änderung des Neutronenflusses (siehe Gl. (I, 2)) erhalten wir unter Berücksichtigung der verspäteten Neutronen:

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \left\{ k_{eff}\,(1-\beta) - 1 \right\} \Sigma_a\, \Phi + Q_N. \tag{I, 14}$$

Die Gesamterzeugung aller Neutronen, die durch den effektiven Multiplikationsfaktor k_{eff} gegeben ist, verkleinert sich um den Faktor $(1-\beta)$. Die verspäteten Neutronen werden durch das Quellglied siehe – Gl. (I, 7) – beschrieben. Setzen wir für N (Konzentration der latenten Neutronen) den gefundenen Ausdruck Gl. (I, 13) ein, so erhalten wir:

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = (k_{eff} - 1)\, \Sigma_a\, \Phi - k_{eff} \cdot \beta \cdot \Sigma_a\, \Phi + k_{eff} \cdot \beta \cdot \Sigma_a \cdot \Phi \;-$$

$$- k_{eff}\, \Sigma_a \int\limits_0^t dt_1\, D\,(t) - t_1)\, \Phi'\,(t_1). \tag{I, 15}$$

Unter Berücksichtigung der Gln. (I, 4) und (I, 5) erhalten wir als Endgleichung für das kinetische Verhalten eines Reaktors:

$$\bar{t}\,\frac{d\Phi}{dt} = \delta k \cdot \Phi - k_{eff} \int\limits_0^{t_0} dt_1\, D\,(t-t_1)\, \Phi'\,(t_1). \tag{I, 16}$$

Das abgeleitete Integral ist offensichtlich eine Korrektur der im ersten Glied vorkommenden Reaktivität δk.

Wir sehen, daß das zweite Glied in Form eines Integrals einen negativen Beitrag zur zeitlichen Veränderung des Neutronenflusses darstellt, solange der Neutronenfluß selbst ansteigt, d. h. der Differentialquotient von Φ positiv ist. Wenn dagegen der Neutronenfluß sinkt (d. h. der unter dem Integralzeichen stehende Differentialquotient negativ wird), dann bildet das zweite Glied der Gleichung insgesamt einen positiven Beitrag, d. h. der Abfall des Neutronenflusses wird gehemmt. Anschaulich bedeutet dies, daß die verspäteten Neutronen jede Veränderung des Neutronenflusses behindern und jede Veränderung des Neutronenflusses sich nur mit einer zeitlichen Verzögerung auf jede Reaktivitätsänderung einstellen kann.

Diese hemmende Wirkung hängt mit dem Größenverhältnis zwischen der Reaktivität δk und dem Bruchteil β der verspäteten Neutronen eng zusammen. Wenn die Überschußreaktivität δk der prompten Neutronen den Bruchteil β der verspäteten Neutronen erreicht oder überschreitet, kommt es zu einem exponentiellen Anstieg des Neutronenflusses, d. h. zu einer explosionsartigen Vermehrung der Neutronen.

Dieses Ereignis spielt sich in einem sehr kurzen Zeitraum ab, so daß wir zu seiner Beschreibung in Gl. (I, 16) die Exponentialfunktion in einer Reihe entwickeln und nach dem ersten Glied abbrechen dürfen, da in den betrachteten Zeiträumen die Korrektur durch das zweite Glied bereits klein gegen 1 ist:

$$e^{-\lambda (t-t_1)} = 1 - \lambda (t - t_1) + \cdots \qquad \text{(I, 17)}$$

Nehmen wir $\lambda = 0{,}1 \text{ sec}^{-1}$ und als Zeitraum z. B. $t < 0{,}1$ sec an, dann ist das zweite Glied der Reihe nur noch eine Korrektur $< 1\%$. Unter Benutzung von Gl. (I, 12) und (I, 17) schreiben wir also für das Integral in Gl. (I, 16):

$$k_{eff} \int\limits_0^t dt_1\, D\,(t-t_1)\,(t_1)\,\Phi' = k_{eff} \cdot \beta \cdot \int\limits_0^t dt_1 \frac{d\,\Phi}{dt_1} = \qquad \text{(I, 18)}$$

$$= \beta\, k_{eff}\,(\Phi(t) - \Phi_0)$$

und für Gl. (I, 16)

$$\bar{t}\, \frac{d\,\Phi}{dt} = (\delta k - \beta\, k_{eff})\, \Phi + \beta\, k_{eff}\, \Phi_0. \qquad \text{(I, 19)}$$

I. Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Überschußreaktivität gleich $\beta\, k_{eff}$ ist. Das heißt anschaulich: Der Bruchteil der mehrerzeugten Neutronen ist gleich dem Bruchteil der verspäteten Neutronen. Die Lösung der Differentialgleichung (I, 19) ist dann:

$$\Phi = \Phi_0 \left(1 + \frac{\beta\, k_{eff}}{\bar{t}}\, t\right). \tag{I, 20}$$

Um die Größenordnung des Anstieges des Neutronenflusses in diesem Falle abzuschätzen, seien folgende Zahlenbeispiele angenommen:

$$\beta = 0{,}01;\ k_{eff} \cong 1 \text{ und } \bar{t} = 0{,}001 \text{ sec.}$$

Nach 0,1 sec hat sich der Neutronenfluß für unser Beispiel verdoppelt, nach 1 sec verelffacht.

II. Wächst die Überschußreaktivität δk über $\beta\, k_{eff}$ hinaus, dann werden die Verhältnisse noch kritischer. Als Lösung der Differentialgleichung (I, 19) ergibt sich:

$$\Phi = \Phi_0 \left\{ \left(1 + \frac{\beta\, k_{eff}}{\delta k - \beta\, k_{eff}}\right) \exp\left[\frac{\delta k - \beta\, k_{eff}}{\bar{t}}\, t\right] - \frac{\beta\, k_{eff}}{\delta k - \beta\, k_{eff}} \right\}. \tag{I, 21}$$

Der Neutronenfluß steigt nach der Exponentialfunktion:

$$\exp\left[\frac{\delta k - k_{eff}}{\bar{t}}\, t\right] \tag{I, 22}$$

an. Ein Reaktor, der mit dieser Überschußreaktivität gefahren wird, befindet sich im „prompt kritischen" Bereich. Er würde sich in einem außerordentlich gefährlichen Zustand befinden, wenn nicht das Anwachsen des Neutronenflusses durch andere physikalische Vorgänge verlangsamt würde, wie später noch erklärt wird.

III. Betrachten wir nun den Fall, in dem die Überschußreaktivität zwar kleiner ist als der Bruchteil der verspäteten Neutronen, diesem jedoch sehr nahe kommt. ($\delta k - \beta\, k_{eff} < 0$ und $\delta k \approx \beta$.)

Dann erfolgt ein exponentieller Anstieg des Neutronenflusses nach der Funktion:

$$\Phi = \Phi_0 \frac{\beta\, k_{eff}}{\beta\, k_{eff} - \delta k} \left\{ 1 - \exp\left[- \frac{(\beta\, k_{eff} - \delta k)\, t}{\bar{t}}\right] \right\}, \tag{I, 22a}$$

da

$$\frac{\beta\, k_{eff}}{\beta\, k_{eff} - \delta k}$$

sehr viel größer als 1 ist.

Die drei oben beschriebenen Fälle lassen sich qualitativ in folgendem Diagramm darstellen:

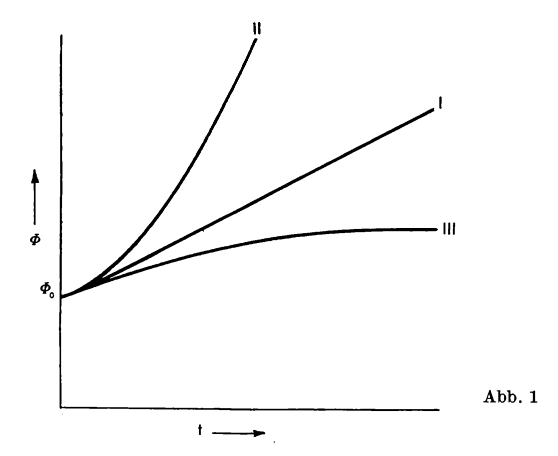


Abb. 1

Die oben angestellten Betrachtungen mit Hilfe der groben Annäherung durch die Zweigruppentheorie zeigen bereits, daß die Reaktivitätserhöhung, sobald sie an den Bruchteil der verzögerten Neutronen kommt, an eine kritische Grenze führt, die im allgemeinen nicht überschritten werden darf. Auch die Beschreibung der Reaktorvorgänge mit einer Mehrgruppentheorie, die im nächsten Kapitel folgen soll, führt zu dem gleichen Ergebnis.

IV. Wir betrachten nun solche Fälle, in denen die Überschußreaktivität sehr klein ist im Vergleich zu dem Bruchteil der verspäteten Neutronen, in denen also die Bedingungen gelten:

$$\delta k << \beta \cdot k_{eff}; \quad \delta_k > 0.$$

Erfahrungsgemäß stellt sich in diesem Fall ein langsam exponentiell ansteigender Neutronenfluß ein. In der ersten Zeit dieses Vorganges gehorcht die Veränderung des Neutronenflusses einer komplizierten Funktion; wir interessieren uns daher nur für das asymptotische Verhalten des Neutronenflusses nach einer längeren Zeit und machen für diese Funktion den Ansatz:

$$\Phi = c \cdot e^{at} \text{ für große } t \qquad \text{(I, 23)}$$

und setzen diese Funktion in Gl. (I, 16) ein:

$$\bar{t}\,\alpha\,\Phi = \delta k \cdot \Phi - \alpha\,k_{eff} \cdot \beta \int_{o}^{t} e^{-\lambda\,(t-t_1)} \cdot e^{\alpha t_1}\,dt_1 =$$

$$= \delta k \cdot \Phi - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\,\beta\,k_{eff}\,\Phi \left\{ 1 - e^{-(\alpha+\lambda)\,t} \right\}. \qquad \text{(I, 24)}$$

Da der Summand mit $e^{-(\alpha+\lambda)\,t}$ nach einiger Zeit vernachlässigbar klein wird, ergibt sich mit den übrigen Summanden für die Zeitkonstante α die Bedingung:

$$\bar{t}\,\alpha = \delta k - \frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\,k_{eff}\,\beta. \qquad \text{(I, 25)}$$

Wir dürfen voraussetzen, daß bei sehr kleiner Reaktivität auch die Zeitkonstante α klein wird und gegenüber der Halbwertszeit λ zu vernachlässigen ist. Es folgt die einfache lineare Gleichung für die Reaktivität:

$$\delta k = \alpha \left\{ \bar{t} + \frac{\beta}{\lambda}\,k_{eff} \right\} \qquad \text{(I, 26)}$$

und für die Zeitkonstante:

$$\alpha = \frac{\delta k}{\bar{t} + \frac{\beta\,k_{eff}}{\lambda}} = \frac{\delta k}{\tau}. \qquad \text{(I, 27)}$$

Die eingeführte Größe τ ist die mittlere Lebensdauer für alle Neutronen. Physikalisch bedeutet dies, daß man für langsame Änderungen im Reaktor die Zeitkonstante α durch die mittlere Lebensdauer aller Neutronen bestimmen kann, was bereits die Beschreibung mit der Eingruppentheorie in Kapitel 2 ergeben hatte. Dabei ist $\tau = 0{,}1$ sec.

V. Wir betrachten nun den Fall, daß δk negativ und sehr klein ist. Er läßt sich genau so behandeln wie der vorhergehende Fall Gl. (I, 26) und führt wieder auf Gl. (I, 27).

VI. Zum Schluß sei noch der Fall für große negative δk behandelt. Dieser Fall tritt beim Abschalten eines Reaktors durch Neutronenabsorber (Abschaltstäbe) ein. Dann wird der Neutronenfluß rasch sinken, also muß die Zeitkonstante $\alpha < 0$ und $|\alpha| < \lambda$ sein, wenn das asymptotische Verhalten des Neutronenflusses in Gl. (I, 24) richtig beschrieben sein soll. Anschaulich bedeutet dies, daß der Neutronenfluß langsamer abfällt als die Konzentration der verspäteten Neutronen.

Für den Fall $\lambda = (10\,\text{sec})^{-1}$ (wobei nach dem soeben Erörterten $|\alpha| < (10\,\text{sec})^{-1}$ sein muß) und $\delta k = -0{,}1$ wird $\bar{t}$ höchstens 10^{-3} bis 10^{-4} sec betragen, so daß man die linke Seite der Gl. (I, 25) gleich Null setzen kann. Es ergibt sich dann aus Gl. (I, 25) für die Reaktivität:

$$\delta k = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \lambda}\, k_{eff} \qquad \text{(I, 28)}$$

und für die Zeitkonstante:

$$\alpha = \frac{-\lambda}{1 - \frac{\beta\, k_{eff}}{\delta k}}. \qquad \text{(I, 29)}$$

Für unser Beispiel errechnet sich: $\alpha = -\lambda \cdot 0{,}93$ mit $\beta = 0{,}0073$ und $k_{eff} = 1$. Nachstehend sind einige Werte von α/λ für verschiedene δ_k zusammengestellt:

δk	$-1{,}0$	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$
α/λ	$-0{,}993$	$-0{,}98$	$-0{,}93$	$-0{,}852$	$-0{,}58$

Wie die vorstehenden Zeitkonstanten $\frac{\alpha}{\lambda}$ zeigen, läßt sich der Abfall des Neutronenflusses nicht beliebig rasch erreichen. Eine Abschaltreaktivität von $\delta k = -0{,}05$ ist mindestens notwendig, um den Prozeß mit einer praktisch ausreichenden Geschwindigkeit (gekennzeichnet durch $\alpha \approx -\lambda$) abzustoppen.

Wir wollen jetzt das Verhältnis der prompten Neutronen zu den latenten Neutronen bilden. Die Zahl der prompten Neutronen n ergibt sich aus dem Neutronenfluß, dividiert durch die Neutronengeschwindigkeit $n = \frac{1}{v}\,\Phi$. In Gl. (I, 4) haben wir die Beziehung $\Sigma_a \cdot v = \frac{1}{\bar{t}}$ erklärt. Es ergibt sich für die Zahl der prompten Neutronen:

$$n = \Sigma_a \cdot \Phi \cdot \bar{t}. \qquad \text{(I, 30)}$$

Die Zahl der latenten Neutronen haben wir in Gl. (I, 13) gefunden:

$$N = \frac{k_\infty}{\lambda \cdot p} \cdot \beta \cdot \Sigma_a \cdot \Phi. \qquad \text{(I, 31)}$$

(Das Integral, das die Veränderung des Neutronenflusses berücksichtigt, ist für unsere Betrachtung gleich Null, da wir nicht einen zeitlich veränderlichen Vorgang, sondern einen stationären Zustand betrachten.)

Es ergibt sich somit für das Verhältnis der prompten Neutronen zu den latenten Neutronen:

$$\frac{n}{N} = \frac{\lambda \cdot p}{k_\infty \cdot \beta} \cdot \bar{t}. \tag{I, 32}$$

Für eine Überschlagsrechnung mögen folgende Werte, die der Wirklichkeit nahe kommen, angenommen sein:

$$\beta \approx 0{,}01; \ \lambda \approx 10^{-1}\,\text{sec}^{-1}; \ p \approx 1; \ k_\infty \approx 1; \ \bar{t} \approx 10^{-3}\,\text{sec}.$$

Für das Verhältnis der prompten Neutronen zu den latenten Neutronen ergibt sich dann:

$$\frac{n}{N} = 10^{-2}.$$

Es stellt sich heraus, daß die meisten Neutronen im Reaktor latente verspätete Neutronen sind.

So ist jetzt auch die verhältnismäßig starke hemmende Wirkung der verspäteten Neutronen auf alle Veränderungen des Neutronenflusses in einem Reaktor verständlich. Man kann sich vorstellen, daß die latenten Neutronen sich in einem „gefüllten Akkumulator“ befinden, der bei jeder Veränderung des Neutronenflusses zunächst einmal den neuen Verhältnissen im Reaktor angepaßt werden muß.

4. Das kinetische Verhalten eines Reaktors bei Berücksichtigung von 6 Neutronengruppen

Im Anschluß an die Betrachtungen des vorigen Kapitels wollen wir nun unsere Methode den wirklichen Verhältnissen noch mehr anpassen und teilen nun die Neutronen nach ihren Zeitkonstanten in sechs Gruppen von verspäteten Neutronen ein. Der Anteil der verspäteten Neutronen wird durch den Bruchteil β_i bezeichnet und die zugehörige Zeitkonstante wird λ_i genannt. In der nachfolgenden Tabelle sind diese Werte für die drei Kernspaltstoffe U^{233}, U^{235} und Pu^{239} zusammengestellt:

Tabelle 1.

Gruppe	Lebens-dauer (sec)	Zeit-konstante (sec^{-1})	U^{233}	Anteil β_i U^{235}	Pu^{239}
1	0,114	6,2	—	0,0003	—
2	0,439	1,6	0,00018	0,00083	0,0004
3	2,11	0,33	0,00061	0,0024	0,00105
4	5,50	0,13	0,00086	0,0021	0,00112
5	19,78	0,035	0,00058	0,0017	0,00094
6	54,31	0,013	0,00018	0,00026	0,00012
			0,0024	0,0076	0,0036

Anstelle der Gl. (I, 9) erhalten wir für die sechs Gruppen von verspäteten Neutronen sechs Gleichungen der Gestalt:

$$\frac{d\,Ni}{dt} = \beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \Phi - \lambda_i N_i.$$

Wir führen ein ähnliches Verfahren ein wie zur Lösung der Gl. (I, 9) und erhalten als Resultat:

$$N_i = \frac{k_\infty \Sigma_a}{\lambda_i p} \left\{ \beta_i \Phi(t) - \int_0^t \beta_i e^{-\lambda_i (t-t')} \frac{d\Phi(t')}{dt'} dt' \right\}. \qquad (I, 34)$$

Wir verwenden die Abkürzung:

$$D(t) = \Sigma_i \beta_i e^{-\lambda_i t}. \qquad (I, 35)$$

Einsetzen in die Gleichung für die prompten Neutronen (siehe Gl. (I, 2) bis (I, 5)) ergibt analog zu Gl. (I, 16):

$$\bar{t} \frac{d\Phi}{dt} = \delta k \Phi - k_{eff} \int_0^t dt_1\, D(t-t_1) \frac{d\Phi(t_1)}{dt_1}. \qquad (I, 36)$$

Diese Gleichung, die uns das kinetische Verhalten eines Reaktors beschreibt, können wir in der gleichen Art wie Gl. (I, 16) interpretieren:

Der Integralausdruck liefert offenbar einen Beitrag zur Reaktivität, der positiv oder negativ sein kann, je nachdem, ob der Neutronenfluß im Reaktor vor dem betrachteten Zeitpunkt angestiegen oder abgefallen war.

Bei den folgenden Betrachtungen wird sich zeigen, daß diese Art, die Wirkung der verzögerten Neutronen darzustellen, sehr zweckmäßig ist.

Wir untersuchen nun solche Vorgänge im Reaktor, die in der Nähe der prompten Kritikalität liegen, d. h. wir nehmen an, daß für eine kurze Zeit die Reaktivität δk ebenso groß bzw. etwas größer als der Anteil aller verspäteter Neutronen ist. In einem solchen Fall dürfen wir wieder die Funktion $D(t)$ in eine Reihe entwickeln und nach dem ersten Glied abbrechen, da die Zeitkonstanten λ_i wesentlich größer sind als die Zeit, in der sich die betrachtete Reaktion abspielt.

$$D(t) = \sum_i \beta_i - \sum_i \beta_i \lambda_i t + \ldots \approx \sum_i \beta_i. \qquad \text{(I, 37)}$$

Diese Überlegungen führen zu einem Analogon der Gl. (I, 19), das auf die gleiche Weise gelöst werden kann, wie im vorigen Kapitel abgehandelt. Wir kommen bei Berücksichtigung aller Gruppen von verspäteten Neutronen analog zu Gl. (I, 26) zu dem Resultat:

$$\delta k = \left(\bar{t} + k_{eff} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}\right) \qquad \text{(I, 38)}$$

für die Reaktivität.

Für die Zeitkonstante ergibt sich:

$$\alpha = \frac{\delta k}{\bar{t} + k_{eff} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}}. \qquad \text{(I, 39)}$$

Die Interpretation dieser Gleichung für verschiedene Reaktivitäten entspricht genau der physikalischen Deutung der analogen Gleichungen im vorigen Kapitel.

Es sei hinzugefügt, daß diese Darstellung ausreichend genau ist für langsame Neutronenflußänderungen. Man wählt daher beim Reaktorbetrieb die Zeiträume für Neutronenflußänderungen so, daß sie ein mehrfaches der Zerfallszeiten für die Erzeugung von verspäteten Neutronen betragen. Dann können diese Vorgänge mit für die Praxis ausreichender Genauigkeit durch Exponentialfunktionen und einer Zeitkonstanten α nach Gl. (I, 39) erfaßt werden.

Eine Ausnahme bildet das Abschalten eines Reaktors, von dem man wünscht, daß es möglichst rasch geschieht. Hier ist die Reaktivität

$$\delta k < 0 \qquad \text{und} \qquad |\delta k| >> \beta. \qquad \text{(I, 40)}$$

Wir wollen zeigen, daß ein exponentieller Abfall des Neutronenflusses beim Abschaltprozeß

$$\Phi = \Phi_0 \, e^{-\alpha t} \qquad (I, 41)$$

nur so erfolgen kann, daß $\alpha < \lambda_k$ (λ_k = Zerfallskonstante für die Gruppe der langlebigsten verspäteten Neutronen) ist. Wir setzen Gl. (I, 41) in Gl. (I, 36) ein und verlangen, daß δk als zeitabhängige Größe in die neue Gleichung eingeht. Wir erhalten:

$$-\alpha \, \bar{t} \, \Phi = \delta k \, \Phi + k_{eff} \sum_i \beta_i \frac{\alpha \, \Phi}{\lambda_i - \alpha} \left\{ 1 - e^{-(\lambda_i - \alpha) t} \right\} \qquad (I, 42)$$

oder:

$$\delta k = -\alpha \, \bar{t} - k_{eff} \sum_i \beta_i \frac{\alpha}{\lambda_i - \alpha} \left\{ 1 - e^{-(\lambda_i - \alpha) t} \right\}. \qquad (I, 43)$$

Wäre $\alpha = \lambda_k$, dann müßte für die Reaktivität δ_k gefordert werden:

$$\delta k = -\alpha \, \bar{t} - k_{eff} \, \beta_k \, \alpha \, t - k_{eff} \sum_{i \neq k} \beta_i \frac{\alpha}{\lambda_i - \alpha} \left\{ 1 - e^{-(\lambda_i - \alpha) t} \right\}. \qquad (I, 44)$$

Das heißt: Die Reaktivität δk müßte, da sie von der Zeit t linear abhängig wäre, absolut genommen immer größer werden. Dies geschieht jedoch in Wirklichkeit nie, da δk höchstens gleich -1 werden kann, wenn $k_{eff} = 0$ erreicht wird. Also ist die Forderung $\alpha = \lambda_k$ nicht zu erfüllen. Die Forderung $\alpha > \lambda_k$ ist noch weniger realisierbar, wie sich leicht zeigen läßt.

Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß $\alpha < \lambda_k$ ist. Dies bedeutet anschaulich, daß die Kettenreaktion etwas langsamer als die Konzentration der langsamsten verspäteten Neutronengruppe und asymptotisch zu dieser verlaufend abfällt.

Eine wichtige Größe beim Abschaltprozeß ist die Neutronendosis $D = \int_0^\infty \Phi \, dt$, die noch erzeugt wird, wenn der Reaktor bereits mit einer negativen Reaktivität gefahren wird. Diese Neutronendosis ist ein Maß für die noch erzeugte Energie. Wir bestimmen sie durch Integration von $t = 0$ bis $t = \infty$ der Gl. (I, 36):

$$\bar{t} \left\{ \Phi(\infty) - (0) \right\} = \delta k \int_0^\infty dt \, \Phi(t) - k_{eff} \int_0^\infty dt \int_0^t D(t - t_1) \frac{d \Phi(t_1)}{dt_1} dt_1. \qquad (I, 45)$$

Zur Lösung des verbleibenden Integrals machen wir den Ansatz:

$$\Phi = \sum_r C_r \, e^{-\alpha_r t} \quad \text{mit} \quad \Phi(0) = \sum_r C_r. \tag{I, 46}$$

Wir können voraussetzen, daß $\alpha_r > 0$ für alle α_r, da Gl. (I, 46) eine Funktion darstellt, die für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert. ($\Phi(\infty) = 0$). Mit diesen Bedingungen erhält man auch ohne die Kenntnis von C_r und α_r durch Einsetzen der Gl. (I, 46) in Gl. (I, 45):

$$-\bar{t}\,\Phi(0) = \delta k \int_0^\infty \Phi \, dt + \Phi(0)\, k_{eff} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \tag{I, 47}$$

oder:

$$D = \int_0^\infty \Phi \, dt = -\frac{\bar{t} + k_{eff} \sum_i \beta_i / \lambda_i}{\delta k}\, \Phi(0). \tag{I, 48}$$

Im Zähler des Bruchs steht die mittlere Lebensdauer der thermischen Neutronen. Die Abschaltdosis D ist umso kleiner, je größer die negative Abschaltreaktivität ist.

Beispiel: $\bar{t} + k_{eff} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \approx 0{,}1$ sec; $\delta_k = -0{,}05$; $\Phi(0) = 10^{14}$ cm^2 sec;

$$D = \frac{0{,}1}{0{,}05} \cdot 10^{14} / \text{cm}^2 = 2 \cdot 10^{14} / \text{cm}^2.$$

II. Der Temperatureinfluß auf die Reaktorkinetik

1. Der Einfluß des Temperaturkoeffizienten

Die bisherigen Betrachtungen berücksichtigen nicht, daß der Vermehrungsfaktor k_{eff} von der Temperatur abhängt. Dieser Zusammenhang ist in Bd. I, S. 126–133 dargestellt. Mit den dort abgeleiteten Gleichungen läßt sich aber der Temperatureinfluß nur mit einer Genauigkeit von 20% berechnen. Um ganz sicher zu gehen, wird der Temperatureinfluß experimentell gemessen, ehe man einen Reaktor in Betrieb nimmt. Die Veränderung des Multiplikationsfaktors mit der Temperatur wird dann über den Temperaturbereich des Reaktorbetriebes ausreichend genau mit Hilfe eines Temperaturkoeffizienten Γ dargestellt:

$$k_{eff}(T) = k_{eff}(T_0) + \delta k - \Gamma T. \tag{II, 1}$$

T_0 ist die mittlere Temperatur (oberhalb der Zimmertemperatur) des Reaktors zu Beginn des betrachteten Betriebsabschnitts. T ist die Abweichung der mittleren Reaktortemperatur von T_0 und δk ist eine zusätzlich eingeschaltete Reaktivitätserhöhung. Wir können auch schreiben:

$$\delta k\,(T) = \delta k - \Gamma\,T. \tag{II, 2}$$

Bei den meisten Reaktoren ist Γ positiv und von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-5}$ bis 10^{-4}/°C. In der Praxis bedeutet dies, daß bei Temperaturerhöhung die Multiplikationskonstante kleiner wird, die Neutronenkonzentration also absinkt. Eine Ausnahme von dieser Regel bildet nur Pu^{239} als Reaktorbrennstoff in thermischen Reaktoren. In diesem Fall ist der Temperaturkoeffizient negativ, d. h. der Reaktor hat keine Selbststabilisierung, so daß für die Regelung solcher Reaktoren ganz besondere Sorgfalt verlangt werden muß. Die in Gl. (II, 2) korrigierte Größe für die Reaktivität $\delta k\,(T)$ setzen wir in die Gl. (I, 36) für die prompten Neutronen ein und erhalten:

$$\bar{t}\,\frac{d\,\Phi}{d\,t} = \Phi\,(\delta k - \Gamma\,T)\,\Phi = k_{eff}\int\limits_0^t dt_1\,D\,(t-t_1)\,\frac{d\,\Phi\,(t_1)}{dt_1}. \tag{II, 3}$$

Bei dieser Reaktorgleichung wurde noch nicht berücksichtigt, daß der Neutronenfluß mit der Leistung eines Reaktors verknüpft ist. Die Aufspeicherung der erzeugten Energie in Form von Wärme und die Leistungsentnahme ändern ständig die Temperatur eines Reaktors und damit auch seinen Neutronenfluß.

Die pro Zeiteinheit gespeicherte Wärmeenergie ist:

$$C \cdot \frac{d\,T}{d\,t}. \tag{II, 4}$$

(C = gesamte Wärmekapazität [in kcal/°C] des Reaktors.)

Die pro Zeiteinheit abgeführte Wärmeenergie ist:

$$F \cdot \alpha\,(T_0 + T - \vartheta) \tag{II, 5}$$

(in dieser Gleichung ist α die Wärmeübergangszahl [in kcal/h°C m^2], ϑ = die über die Länge des Reaktors gemittelte Kühlgastemperatur, F = Wärmeübergangsfläche des Reaktors).

Die Leistung eines Reaktors ist also:

$$Q = C\,\frac{d\,T}{d\,t} + \alpha \cdot F\,(T_0 + T - \vartheta). \tag{II, 6}$$

Die in einem Reaktor erzeugte Leistung ist abhängig von der Anzahl der Spaltungen pro cm³ sec, $\Sigma_{sp}\ \Phi$ und dem Volumen eines Reaktors V – siehe Bd. I, Gl. (II, 11).

$$Q = \Sigma_{sp} \cdot \Phi \cdot V \cdot E_{sp}. \qquad \text{(II, 7)}$$

(E_{sp} = die pro Spaltung freiwerdende Energie.)

Diese direkte Abhängigkeit der Leistung vom Neutronenfluß gestattet es, die Leistung in Gl. (II, 3) statt des Neutronenflusses einzusetzen:

$$\bar{t} \cdot \frac{d\,Q}{d\,t} = (\delta k - \Gamma\,T)\;Q - k_{eff} \int\limits_0^t dt_1\;D\,(t - t_1)\;\frac{d\,Q\,(t_1)}{dt_1}. \qquad \text{(II, 8)}$$

Der Spaltungsquerschnitt Σ_{sp} ist seinerseits ebenfalls temperaturabhängig. Eine genauere Ableitung zeigt aber, daß bei der Verwendung der Brennstoffe U^{233} und U^{235} sich diese Abhängigkeit gegen die Temperaturabhängigkeit von Φ heraushebt und bei $P_u{}^{239}$ als Brennstoff sich diese Abhängigkeit in Form einer Korrektur zu den Temperaturkoeffizienten Γ in ausreichender Näherung darstellen läßt.

In Gl. (II, 8) sehen wir einige interessante Zusammenhänge aufgezeichnet: Wird nämlich die Leistung Q vergrößert, dann erhöht sich nach Gl. (II, 6) die Temperatur ($T > 0$) und damit wird $(\delta k\,(T_0) - \Gamma\,T) < 0$ und $\frac{d\,Q}{d\,t} < 0$; die Leistung erniedrigt sich also wieder. Der Integralausdruck entspricht einer Verzögerung dieser Vorgänge. Die Reaktorkinetik zeigt also drei wesentliche Merkmale:

1. Leistung und Temperatur sind nach oben begrenzt.
2. Die Änderung von Leistung und Temperatur ist verzögert.
3. Diese Verzögerung ist um so größer, je größer die Änderung ist.

Diese Selbstregelung stellt eine ausgezeichnete Stabilisierung der Reaktoren dar, die durch eine äußere Regelung kaum übertroffen werden könnte.

Bei vorgegebener Reaktivität δk und einer mittleren Reaktortemperatur T (über die Zimmertemperatur) stabilisiert sich der Reaktor mit den Werten:

$$\frac{d\,Q}{d\,t} = 0\,;\quad \delta k = \Gamma\,T;\quad Q = \alpha \cdot F\,(T_0 + T - \vartheta) = \alpha \cdot F\,\left(T_0 + \frac{\delta k}{\Gamma} - \vartheta\right).$$

Schließlich soll noch die mittlere Kühlgastemperatur ϑ durch die für jedes Reaktorsystem charakteristische Größe des Kühlstroms ausgedrückt werden. Der Kühlstrom sei mit J [kg/sec] bezeichnet. Dann ist die pro sec abgeführte Energie: $J\,c_p \cdot 2\,(\vartheta - \vartheta_0)$, wenn ϑ_0 die Eingangstemperatur und c_p die spezifische Wärme des Kühlmittels ist. $2\,(\vartheta - \vartheta_0)$ ist dabei die Temperaturdifferenz, um die das Kühlmedium bei Durchtreten durch den Reaktor aufgeheizt wird. Diese abgeführte Leistung muß der von den Brennelementen auf das Kühlmedium in Gl. (II, 5) gleich sein:

$$F\,\alpha\,(T_0 + T - \vartheta) = 2\,J\,c_p\,(\vartheta - \vartheta_0). \qquad \text{(II, 9)}$$

Wir eliminieren daraus ϑ und setzen es in Gl. (II, 6) ein und erhalten:

$$Q = C\,\frac{d\,T}{d\,t} + \frac{2\,J c_p\,\alpha\,F}{2\,J c_p + \alpha F}\,(T_0 + T - \vartheta_0). \qquad \text{(II, 10)}$$

2. Langsame Veränderungen

Während des Reaktorbetriebes werden normalerweise nur solche Operationen vorgenommen, die mit einer langsamen Änderung von Neutronenfluß, Leistung, Temperatur und abgeführter Wärmemenge verbunden sind. Den Maßstab für die Geschwindigkeit einer solchen Änderung gibt der Vergleich mit den Zerfallskonstanten und damit der Abnahme der Anzahl verspäteter Neutronen. Die längste zugehörige Zerfallszeit einer allerdings sehr kleinen Neutronengruppe liegt bei 60 sec; so kann man alle Regelvorgänge, die länger als 60 sec dauern, als „langsame" Änderungen bezeichnen.

In diesen Fällen kann die Gl. (I, 48) für ihre Anwendung in der Praxis wesentlich vereinfachen. Wir gehen von der in Gl. (I, 35) definierten Funktion aus und bezeichnen entsprechend:

$$D^{(1)}(t) = \sum i\,\frac{\beta_i}{\lambda_i}\,e^{-\lambda_i t}. \qquad \text{(II, 11)}$$

Durch partielle Integration findet man:

$$\int_0^t D^{(1)}(t-t_1)\,\frac{d^2\,Q(t_1)}{dt_1^2}\,dt_1 = \left[D^{(1)}(t-t_1)\,\frac{d\,Q\,(t_1)}{dt_1}\right]_0^t - \int_0^t D\,(t-t_1)\,\frac{d\,Q\,(t_1)}{dt_1}\,dt_1. \qquad \text{(II, 12)}$$

Die Richtigkeit dieser Lösung bestätigt eine Differentiation der Gl. (II, 12) nach t_1.

Nachdem die Grenzen in den ersten Summanden eingesetzt sind, erhält man aus Gl. (II, 12):

$$\int_0^t D(t-t_1)\,\frac{dQ(t_1)}{dt_1}\,dt_1 = \frac{dQ(t)}{dt}\cdot\sum i\,\frac{\beta_i}{\lambda_i} - \frac{dQ(o)}{dt}\sum i\,\frac{\beta_i}{\lambda_i}\,e^{-\lambda_i t} -$$

$$-\int_0^t D^{(1)}(t-t_1)\,\frac{d^2Q(t_1)}{dt^2_1}\,dt. \qquad \text{(II, 13)}$$

Da wir eine langsame Änderung voraussetzen, wird sowohl die Änderung der Anfangsleistung

$$\frac{dQ(o)}{dt}\sum i\,\frac{\beta_i}{\lambda_i}\,e^{-\lambda_i t}.$$

schnell abgeklungen sein als auch die zweite Differentiation $\frac{d^2Q(t)}{dt^2}\approx 0$,

so daß wir die beiden letzten Glieder der Gl. (II, 13) vernachlässigen dürfen:

$$\int_0^t D(t-t_1)\,\frac{dQ(t_1)}{dt_1}\,dt_1 \approx \frac{dQ(t)}{dt}\sum i\,\frac{\beta_i}{\lambda_i}. \qquad \text{(II, 14)}$$

Diesen vereinfachten Ausdruck setzen wir in Gl. (II, 8) ein:

$$\tau\,\frac{dQ}{dt} = (\delta k - \Gamma\,T)\,Q \;\text{ mit }\; \tau = \left(\bar{t} + \sum i\,\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right). \qquad \text{(II, 15)}$$

τ = mittlere Lebensdauer aller Neutronen. Gl. (II, 13) stellt zusammen mit Gl. (II, 6) ein nichtlineares Differentialgleichungssystem dar. Die geschlossene Lösung solcher Systeme ist sehr schwierig und existiert für unseren Fall nicht. Andererseits hat dieses System wegen seines nichtlinearen („quadratischen") Gliedes die Eigenschaften einer quadratischen Gleichung, d. h. die Größe der variablen Q ist festgelegt. Auch ohne geschlossene Lösung lassen sich mit Hilfe der obigen Differentialgleichungen einige einfache Überlegungen für den Normalbetrieb eines Reaktors anstellen.

Für jeden stationären Zustand gelten:

$$\tau \cdot \frac{d\,Q}{d\,t} = 0 = (\delta k - \Gamma\, T)\, Q, \text{ woraus folgt: } \delta k = \Gamma\, T \qquad \text{(II, 16)}$$

und

$$C \cdot \frac{d\,T}{d\,t} = 0 = Q - \alpha\, F\, (T_0 + T + \vartheta), \text{ woraus folgt:}$$

$$Q = \alpha \cdot F\, (T_0 + T - \vartheta). \qquad \text{(II, 17)}$$

Ist die Temperatur gleich der Normaltemperatur, d. h. $T = 0$, dann ist nach Definition auch $\delta k = 0$, und nach Gl. (II, 17) die Normalleistung:

$$Q_0 = \alpha \cdot F \cdot (T_0 - \vartheta). \qquad \text{(II, 18)}$$

Die Normalleistung ist nur durch die Normaltemperatur, die Gastemperatur und die Wärmeübergangszahl gegeben. Alle Änderungen der Reaktorleistung führen wieder in stationäre Zustände zurück, die durch das Gleichungspaar (II, 17) und (II, 18) gegeben sind.

Die Übergangsfunktionen lassen sich aus Gl. (II, 15) und Gl. (II, 6) im allgemeinen nur mit Hilfe von Rechenmaschinen ermitteln. Einige einfache Fälle, die das Reaktorverhalten in den Übergangszeiten kennzeichnen, sollen im folgenden abgehandelt werden.

a) Langsames Hochfahren des Reaktors ohne Reaktivitätsänderung

Für den Fall $\delta k = 0$ sei das Ansteigen der Reaktorleistung beim Anfahren eines Reaktors vorgegeben in der Form:

$$Q = Q_0\, e^{\mu t}. \qquad \text{(II, 19)}$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (II, 15) ein, so erhält man:

$$T = -\frac{\tau \cdot \mu}{\Gamma} = \text{const.} \qquad \text{(II, 20)}$$

Aus Gl. (II, 6) gewinnt man mit diesen beiden Größen – Gl. (II, 19) und Gl. (II, 20) –:

$$\alpha \cdot F = \frac{Q_0\, e^{\mu t}}{\left(T_0 - \frac{\tau \cdot \mu}{\Gamma} - \vartheta\right)}. \qquad \text{(II, 21)}$$

Das Ergebnis zeigt, daß bei einem exponentiellen Anstieg der Reaktorleistung während des Anfahrens die Wärmeübergangszahl exponentiell steigen muß, wobei gleichzeitig die Betriebstemperatur T sinkt. Wir verdeutlichen dieses Resultat noch an einem Zahlenbeispiel:

Zeitkonstante der Reaktorleistung $\mu = 10^{-3}$/sec (d. h. die Leistung Q verdoppelt sich in etwa 11 min.).
Temperaturkoeffizient $\Gamma = 10^{-4}$/°C,
mittlere Lebensdauer aller Neutronen $\tau = 0{,}1$ sec.

Dann wird nach Gl. (II, 20):

$$T = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} \,°\mathrm{C} = -1°\mathrm{C}$$

Dieses Beispiel zeigt, daß die Abweichungen von der Betriebstemperatur bei Umschaltprozessen nur klein sind.

b) Langsames Abfahren der Reaktorleistung

Die obigen Überlegungen gelten mutatis mutandis für das langsame Erniedrigen der Reaktorleistung. In den Gl. (II, 19) bis (II, 21) muß nur die Zeitkonstante der Reaktorleistung μ negativ sein.

In diesem Fall haben wir einen Anstieg der Temperatur über die Betriebstemperatur hinaus um den Betrag:

$$\frac{\tau \cdot \mu}{\Gamma}. \tag{II, 22}$$

Als Zahlenbeispiel sei gewählt:

$\mu = 10^{-2}$/sec (die Leistung sinkt pro 1,2 min auf die Hälfte herab),
$\Gamma = 10^{-4}$/°C,
$\tau = 0{,}1$ sec.

Dann wird: $T = \dfrac{10^{-1} \cdot 10^{-2}}{10^{-4}} \,°\mathrm{C} = 10°\,\mathrm{C}.$

c) Langsame Steigerung der Leistung ohne Temperaturveränderung

Für diese Fälle gilt also: $T = 0$ und $\dfrac{dT}{dt} = 0.$

Die beiden Gleichungen, die das Verhalten des Reaktors beschreiben, heißen nun:

$$\tau \frac{dQ}{dt} = \delta k \cdot Q \tag{II, 23}$$

und

$$Q = -\alpha \cdot F\,(T_0 - \vartheta). \tag{II, 24}$$

Dabei soll δk eine Funktion von der Zeit t sein. Die Reaktivität läßt sich durch Regelstäbe ändern und soll so gewählt werden, daß $T = 0$ und $\frac{dT}{dt} = 0$ ist. Die Leistung wollen wir z. B. nach folgendem Gesetz verdoppeln:

$$Q = Q_0\,(2 - e^{-At}). \tag{II, 25}$$

Der Wärmeübergang soll ebenfalls regelbar sein, so daß $\alpha \cdot F = A\,(t)$ dem gleichen Gesetz gehorcht wie die Leistungsänderung:

$$A\,(t) = A_0\,(2 - e^{-At}). \tag{II, 26}$$

Aus den Gl. (II, 23) und (II, 24) ergibt sich:

$$\delta k\,(t) = \tau \cdot A\,\frac{e^{-At}}{2 - e^{-At}}. \tag{II, 27}$$

Der Anfangswert der Reaktivität ergibt sich zu:

$$\delta k\,(0) = \tfrac{1}{2}\,A\,\tau. \tag{II, 28}$$

Soll der Prozeß innerhalb einiger Minuten stattfinden, so müssen wir $A \cong 10^{-2}$/sec wählen, das ergibt für die Reaktivität: $\delta k\,(0) = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ mit $\tau = 0{,}1$ sec.

Regelt man die Wärmeübergangszahl A und die Reaktivität gleichzeitig, dann kann man solche Verhältnisse schaffen, daß der Reaktor ohne Temperaturänderung hochgefahren werden kann und der Reaktivitätssprung nach wenigen Minuten wieder auf Null zurückgegangen ist.

d) Langsames Hochfahren des Reaktors ohne Wärmeentnahme

In diesem Fall wird kein Wärmeübergang stattfinden, also $\alpha = 0$ sein. Da die Temperatur eines Reaktors stets über der seiner Umwelt liegt,

läßt sich trotz Abschalten des Kühlstroms eine kleine Abkühlung δQ nicht vermeiden, so daß wir als charakteristische Gleichungen erhalten:

$$\tau \frac{dQ}{dt} = (\delta k - \Gamma T)\, Q \qquad \text{(II, 29)}$$

und

$$C \cdot \frac{dT}{dt} = Q - \delta Q. \qquad \text{(II, 30)}$$

Für den Anfangszustand sei $\delta k = 0$. Wir stellen uns die Aufgabe, den Reaktor von der Betriebstemperatur auf eine neue Temperatur T_1 zu bringen, wobei möglichst hohe Anforderungen an die Sicherheit gestellt werden, d. h., Temperatur und Leistung müssen anfangs sehr langsam ansteigen und dem gewünschten Wert asymptotisch zustreben.

Das bedeutet mathematisch:

$$\begin{aligned} &T\,(0) = 0, \quad &&T\,(\infty) = T_1, \quad &&Q\,(0) = \delta Q, \\ &T'\,(0) = 0, \quad &&T'\,(\infty) = 0, \quad &&Q'\,(0) = 0. \end{aligned} \qquad \text{(II, 31)}$$

Diese Bedingungen können z. B. durch die Funktion:

$$T = T_1 \frac{(\alpha t)^3}{1 + (\alpha t)^3} \qquad \text{(II, 32)}$$

erfüllt werden.

Aus Gl. (II, 30) erhalten wir für die Leistung:

$$Q = \delta Q + C \cdot T_1 \frac{3\,\alpha^3 t^2}{(1 + (\alpha t)^3)^2}. \qquad \text{(II, 33)}$$

Die für diesen Prozeß notwendige Reaktivitätsänderung läßt sich aus Gl. (II, 29) ermitteln:

$$\delta k = \frac{\Gamma T_1}{1 + (\alpha t)^3} \left\{ \frac{6 \frac{\tau \cdot C}{\Gamma} \alpha^3 t\,(1 - 2\,(\alpha t)^3)}{\delta Q\,(1 + (\alpha t)^3)^2 + C\,T_1\,3\,\alpha^3 t^2} + \alpha^3 t^3 \right\}. \qquad \text{(II, 34)}$$

Die Reaktivität beginnt bei Null, d. h. $t = 0$ und $\delta k\,(0) = 0$. Die Funktion $\delta k\,(t)$ steigt langsam mit $\delta k \approx 6\,T_1 \frac{\tau\, C\, \alpha^2}{\delta Q}\, \alpha\, t$ an. Für große t

geht δk asymptotisch gegen einen Wert $\delta k(\infty)$, der durch das neue Temperaturniveau T_1 und den Temperaturkoeffizienten bestimmt wird:

$$\delta k(\infty) = \Gamma\, T_1. \qquad \text{(II, 35)}$$

Nach der Zeit $t = \dfrac{1}{\alpha \cdot \sqrt[3]{2}}$ erreicht die Leistung Q ihr Maximum mit dem Wert:

$$Q_{\text{Max}} = \delta Q + \frac{2}{3}\sqrt[3]{2} \cdot C \cdot T_1 \cdot \alpha. \qquad \text{(II, 36)}$$

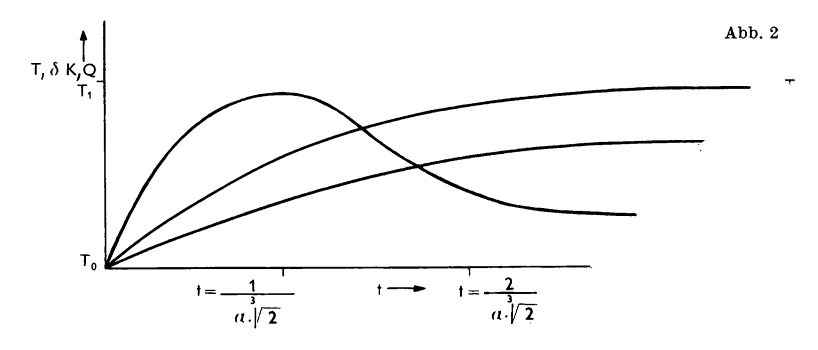
Temperatur (T) und Reaktivität (δk) erreichen zum Zeitpunkt $t = \dfrac{1}{\alpha\, \sqrt[3]{2}}$ ein Drittel ihres Endwertes — s. Gl. (II, 32) und (II, 34).

Die bis zur Zeit t produzierte Energie ist nach Gl. (II, 30):

$$\int (Q - \delta Q)\, dt = C \int dT = C\, T(t) = C\, T_1 \frac{(\alpha \cdot t)^3}{1 + (\alpha\, t)^3}. \qquad \text{(II, 37)}$$

Nach der Zeit $t = \dfrac{1}{\alpha \cdot \sqrt[3]{2}}$ (etwa einem Drittel der Gesamtdauer des Prozesses) ist die produzierte Energie etwa ein Drittel und nach $t = \dfrac{2}{\alpha \cdot \sqrt[3]{2}}$ vier Fünftel (d. h. 0,8) des Endwertes CT_1.

Das untenstehende Schaubild zeigt den Verlauf der Funktionen für Temperatur, Reaktivität und Leistung in Abhängigkeit von der Zeit:



läßt sich trotz Abschalten des Kühlstroms eine kleine Abkühlung δQ nicht vermeiden, so daß wir als charakteristische Gleichungen erhalten:

$$\tau \frac{d\,Q}{d\,t} = (\delta k - \Gamma\,T)\,Q \tag{II, 29}$$

und

$$C \cdot \frac{d\,T}{d\,t} = Q - \delta\,Q. \tag{II, 30}$$

Für den Anfangszustand sei $\delta k = 0$. Wir stellen uns die Aufgabe, den Reaktor von der Betriebstemperatur auf eine neue Temperatur T_1 zu bringen, wobei möglichst hohe Anforderungen an die Sicherheit gestellt werden, d. h., Temperatur und Leistung müssen anfangs sehr langsam ansteigen und dem gewünschten Wert asymptotisch zustreben.

Das bedeutet mathematisch:

$$\begin{aligned} &T\ (0) = 0, \qquad &&T\ (\infty) = T_1, \qquad &&Q\,(0) = \delta\,Q, \\ &T'\,(0) = 0, \qquad &&T'\,(\infty) = 0, \qquad &&Q'\,(0) = 0. \end{aligned} \tag{II, 31}$$

Diese Bedingungen können z. B. durch die Funktion:

$$T = T_1\,\frac{(\alpha\,t)^3}{1 + (\alpha\,t)^3} \tag{II, 32}$$

erfüllt werden.

Aus Gl. (II, 30) erhalten wir für die Leistung:

$$Q = \delta\;Q + C\,\cdot\,T_1\,\frac{3\,\alpha^3\,t^2}{(1 + (\alpha\,t)^3)^2}. \tag{II, 33}$$

Die für diesen Prozeß notwendige Reaktivitätsänderung läßt sich aus Gl. (II, 29) ermitteln:

$$\delta k = \frac{\Gamma\,T_1}{1 + (\alpha\,t)^3}\left\{\frac{6\,\frac{\tau\,\cdot\,C}{\Gamma}\,\alpha^3\,t\,(1 - 2\,(\alpha\,t)^3)}{\delta\,Q\,(1 + (\alpha\,t)^3)^2 + C\,T_1\,3\,\alpha^3\,t^2} + \alpha^3\,t^3\right\}. \tag{II, 34}$$

Die Reaktivität beginnt bei Null, d. h. $t = 0$ und $\delta k\,(0) = 0$. Die Funktion $\delta k\,(t)$ steigt langsam mit $\delta k \approx 6\,T_1\,\dfrac{\tau\,C\,\alpha^2}{\delta\,Q}\,\alpha\,t$ an. Für große t

geht δk asymptotisch gegen einen Wert $\delta k(\infty)$, der durch das neue Temperaturniveau T_1 und den Temperaturkoeffizienten bestimmt wird:

$$\delta k(\infty) = \Gamma T_1. \tag{II, 35}$$

Nach der Zeit $t = \dfrac{1}{\alpha \cdot \sqrt[3]{2}}$ erreicht die Leistung Q ihr Maximum mit dem Wert:

$$Q_{\text{Max}} = \delta Q + \frac{2}{3} \sqrt[3]{2} \cdot C \cdot T_1 \cdot \alpha. \tag{II, 36}$$

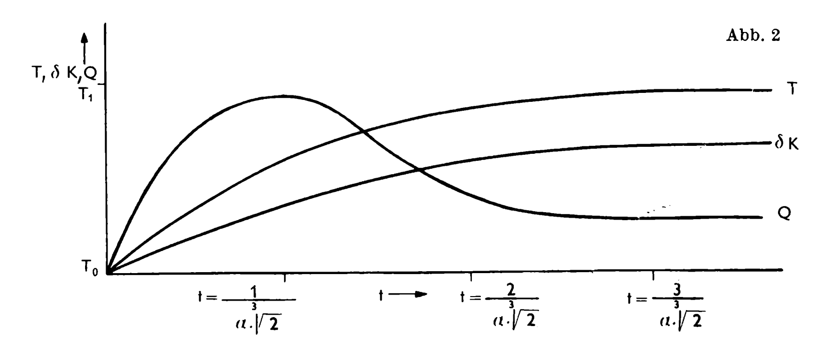
Temperatur (T) und Reaktivität (δk) erreichen zum Zeitpunkt $t = \dfrac{1}{\alpha \sqrt[3]{2}}$ ein Drittel ihres Endwertes — s. Gl. (II, 32) und (II, 34).

Die bis zur Zeit t produzierte Energie ist nach Gl. (II, 30):

$$\int (Q - \delta Q)\, dt = C \int dT = C\, T(t) = C\, T_1 \frac{(\alpha \cdot t)^3}{1 + (\alpha t)^3}. \tag{II, 37}$$

Nach der Zeit $t = \dfrac{1}{\alpha \cdot \sqrt[3]{2}}$ (etwa einem Drittel der Gesamtdauer des Prozesses) ist die produzierte Energie etwa ein Drittel und nach $t = \dfrac{2}{\alpha \cdot \sqrt[3]{2}}$ vier Fünftel (d. h. 0,8) des Endwertes CT_1.

Das untenstehende Schaubild zeigt den Verlauf der Funktionen für Temperatur, Reaktivität und Leistung in Abhängigkeit von der Zeit:



Das Bild zeigt, daß Temperatur und Reaktivität einander proportional ansteigen; die beiden Kurven werden nur anfangs durch den ersten Ausdruck in der Klammer von Gl. (II, 34) beeinflußt; nach kurzer Zeit bestimmt nur noch der zweite Summand in dieser Klammer die Kurvengestalt.

e) Zusammenfassende Betrachtung über die behandelten Sonderfälle

Die drei speziellen Lösungen der Gl. (II, 6) und (II, 15) sind für typische Fälle beim Betrieb eines Reaktors gefunden worden. Sie zeigen, daß bei langsamen Änderungen der zeitliche Ablauf zu Beginn des Prozesses schwierig darzustellen ist; der langsame Übergang selbst gehorcht dagegen verhältnismäßig einfachen Gesetzen.

Für die Praxis kann man im allgemeinen annehmen, daß die Regelgröße der Stellengröße fast exakt folgt, wenn der Vorgang langsam genug abläuft.

Das bedeutet für die beiden ersten Beispiele — 1. An- und Abfahren der Reaktorleistung ohne Reaktivitätsänderung und 2. Leistungsänderung ohne Temperaturänderung; — im ersten Falle folgt die Leistung der Wärmeabfuhr und im zweiten Beispiel folgt die Temperatur der Reaktivitätserhöhung.

Unsere einfachen Rechenbeispiele zeigen außerdem, daß sich die interessierenden Lösungen leichter finden lassen, wenn man zunächst für die gesuchten Größen Schätzfunktionen ansetzt und dann die für den Prozeß erforderlichen Stellengrößen vorläufig festlegt; diese paßt man schließlich den beim Betrieb tatsächlich stattfindenden Vorgängen durch Verbesserung der Schätzfunktionen an.

3. *Schnelles Abschalten der Wärmeübertragung*

Während des Betriebes kann es notwendig werden, daß die Wärmeübertragungsanlage eines Reaktors ausgeschaltet wird. Diese Maßnahme kann durch einen Unfall erforderlich werden; es ist aber auch möglich, daß eine solche Operation während des Reaktorbetriebes von vornherein geplant war. Da in einer solchen Situation der Reaktor immer unter einer gewissen Leistung steht — d. h., es wird Leistung im Reaktor erzeugt und über den Wärmeaustauscher abgenommen —, wird bei einem plötzlichen Ausfall der Wärmeübertragungsanlage die Temperatur innerhalb des Reaktors stets ansteigen.

Es handelt sich dabei um schnell ablaufende Vorgänge, so daß bei den nun folgenden Überlegungen der Einfluß der verspäteten Neutronen genauer als bisher berücksichtigt werden muß.

Es gelten also die Gleichungen:

$$\bar{t}\,\frac{d\,Q}{d\,t} = (\delta k - \Gamma\,T)\,Q - \int\limits_0^t dt_1\,D\,(t-t_1)\,\frac{d\,Q\,(t)}{dt_1} \qquad \text{(II, 38)}$$

und

$$C\,\frac{d\,T}{d\,t} = Q - A(T_0 + T - \vartheta); \qquad \text{(II, 39)}$$

— vgl. Gl. (II, 6) und (II, 8).

Bis zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Reaktor im stationären Zustand, der durch folgende Größen gekennzeichnet ist:

$$Q = Q_0 = A_0\,(T_0 - \vartheta);\; A = A_0 \qquad \text{(II, 40)}$$

$$\frac{d\,T}{d\,t} = 0;\;\; T = 0;\;\; \delta k = 0. \qquad \text{(II, 41)}$$

Ein Ereignis, wie eingangs beschrieben, wird zunächst die Reaktivität δk und die Wärmeübergangszahl A ändern. Der Wärmeübergang verschwindet innerhalb von 20–100 Sekunden; A konvergiert also gegen Null. Wir wollen bei unseren Überlegungen besonders pessimistisch sein und nehmen an, daß A plötzlich gegen Null geht.

In den meisten Fällen muß auch damit gerechnet werden, daß die Reaktivität sich ändert; sei es dadurch, daß Abschaltstäbe eingeführt werden, oder daß die Zusammensetzung der für den Neutronenhaushalt wichtigen Stoffe im Reaktor sich ändert (z. B. Ausfall von neutronenabsorbierenden Kühlgasen). Die Reaktivitätsänderung muß also mitberücksichtigt werden, gleichgültig, ob die Gesamtreaktivität positiv oder negativ ist.

Nach dem Zeitpunkt $t = 0$ gilt statt der Gleichung (II, 39) nunmehr:

$$Q = C \cdot \frac{d\,T}{d\,t}. \qquad \text{(II, 42)}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in Gl. (II, 38) ein und integrieren von 0 bis ∞, um den Temperaturanstieg für $T\infty$ zu gewinnen:

$$\bar{t}\,\{\,Q\,(\infty) - Q_0\,\} = \delta k\,C\int\limits_0^\infty \frac{d\,T}{d\,t}\,dt - \Gamma \cdot C\int\limits_0^\infty \frac{d\,T}{d\,t}\,T\,dt$$

$$- \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^t dt_1\,D\,(t-t_1)\,\frac{d\,Q\,(t_1)}{dt_1}. \qquad \text{(II, 43)}$$

Da die Kettenreaktion abreißt, wenn keine Energie mehr abgeführt wird (Selbststabilisierung!), wird $Q(\infty)$ auf jeden Fall gleich Null.

$$-\bar{t}\ Q_0 = \delta k \cdot C \cdot T_\infty - \frac{1}{2}\,\Gamma \cdot C \cdot T_\infty{}^2 - $$

$$- \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^t dt_1\, D\,(t - t_1)\,\frac{d\,Q\,(t_1)}{dt_1}. \qquad \text{(II, 44)}$$

Es ist noch das Doppelintegral zu berechnen; wir führen daher die partielle Integration – vgl. Gl. (II, 13) – fort und erhalten:

$$\int\limits_0^t dt_1\, D\,(t - t_1)\, Q'\,(t_1) = Q'\,(t) \sum i\, \frac{\beta_i}{\lambda_i} - Q'\,(0) \sum i\, \frac{\beta_i}{\lambda_i}\, e^{-\lambda_i t} -$$

$$+ Q''\,(t) \sum i\, \frac{\beta_i}{\lambda_i{}^2} + Q''\,(0) \sum i\, \frac{\beta_i}{\lambda_i{}^2}\, e^{-\lambda_i t} +$$

$$+ Q'''\,(t) \sum i\, \frac{\beta_i}{\lambda_i{}^3} \pm \;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad \text{(II, 45)}$$

$$. \;.\; + Q^{(n)}\,(t) \sum i\, \frac{\beta_i}{\lambda_i{}^n} - Q_0{}^{(n)}\,(0) \sum i\, \frac{\beta_i}{\lambda_i{}^n}\, e^{-\lambda_i t} \pm \;.\;.$$

Bei der Integration über die Grenzen $t = 0$ und $t = \infty$ (wobei alle $Q(\infty) = Q'(\infty) = Q''(\infty) = \ldots. = 0$) hebt sich jeweils das zweite gegen das dritte, das vierte gegen das fünfte Glied u. s. f. auf.

Das Ergebnis ist:

$$\int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^t dt_1\, D\,(t - t_1)\, Q'\,(t_1) = -\, Q_0 \sum i\, \frac{\beta_i}{\lambda_i}. \qquad \text{(II, 46)}$$

Gleichung (94) in Gl. (92) eingesetzt ergibt:

$$-\,\tau\, Q_0 = \delta k \cdot C \cdot T_\infty - \frac{1}{2}\,\Gamma\, C\, T_\infty{}^2 \qquad \text{(II, 47)}$$

und hieraus:

$$T_\infty = \frac{\delta k}{\Gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{2\,\tau\, Q_0}{\Gamma \cdot C}\right) + \left(\frac{\delta k}{\Gamma}\right)^2}. \qquad \text{(II, 48)}$$

Nur das positive Vorzeichen der Wurzel hat einen physikalischen Sinn. Dieses Ergebnis sei durch vier Zahlenbeispiele erläutert:

1. Der Spaltstoff sei in Graphit (Moderator) homogen verteilt, so daß die Wärmekapazität von bspw. 40 t Graphit eingesetzt werden kann.

   $Q_0 = 100\ Mw$ (thermisch) $= 2{,}4 \cdot 10^4$ kcal/sec,
   $\tau = 0{,}1$ sec,
   $\Gamma = 10^{-4}\ /°C$,
   c_p (Graphit) $= 0{,}2$ kcal/kg °C, d. h. $C = 0{,}8 \cdot 10^4$ kcal/°C $\delta k = 0$.

   Mit diesen Zahlen berechnet man:

$$T_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}4 \cdot 10^4}{10^{-4} \cdot 0{,}8 \cdot 10^4}} = 77{,}5\ °\text{C}.$$

2. Es liegen die gleichen Verhältnisse wie im ersten Beispiel vor außer:

   $\delta k = +\,0{,}02.$

   Dann wird:

$$T_\infty = 2 \cdot 10^2 + \sqrt{0{,}6 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^4} = 414\ °\text{C}.$$

3. Beim gleichen Reaktor sei die Reaktivität:

   $\delta k = -\,0{,}02$

   Dann ist:

$$T_\infty = -\,2 \cdot 10^2 + \sqrt{0{,}6 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^4} = 14°\text{C}.$$

4. Es werden die gleichen Zahlen wie im dritten Beispiel angenommen, doch

   $Q_0 = 200\ Mw.$

   Es ergibt sich:

   $T_\infty = 28°\,\text{C}.$

Die angeführten Beispiele und Gleichung (II, 48) zeigen, daß die Gefahr einer Überhitzung des Reaktors vor allem dann besteht, wenn das Verhältnis zwischen Leistung und Wärmekapazität (spezifische Leistung) groß bzw. der Temperaturkoeffizient klein ist.

Da der Temperaturanstieg eng mit der Reaktivität verknüpft ist, kann der Gefahr eines plötzlichen starken Temperaturanstiegs durch Verminderung der Reaktivität (Einführen der Abschaltstäbe) gesteuert werden.

4. Das Verhalten eines Reaktors im prompt-kritischen Fall

Wenn in einem Reaktor, der sich im stationären Zustand befindet, plötzlich die Reaktivität über die kritische Grenze β hinaus steigt, dann schwillt die Kettenreaktion explosionsartig an, weil der verzögernde Einfluß der verspäteten Neutronen keine Rolle mehr spielt. Diese Störung ist die schlimmste, die beim Betrieb eines Reaktors überhaupt möglich ist. Sie kann durch Herausziehen von neutronenabsorbierenden Abschaltstäben ausgelöst werden; es kann auch der Verlust von anderen neutronenabsorbierenden Stoffen — z. B. Kühlmittel — infolge einer Leckage zu diesem Ereignis führen; schließlich kann diese Störung auch die Folge einer äußeren Katastrophe sein.

Innerhalb von Bruchteilen einer Sekunde steigt der Neutronenfluß auf einen Wert, der um Zehnerpotenzen größer als der stationäre Neutronenfluß sein kann. Die Temperatur folgt der Leistung mit der gleichen Geschwindigkeit; doch wird das Ansteigen der Temperatur nach kurzer Zeit die Reaktion wieder stoppen. Bei homogenen Reaktoren wird die plötzliche Temperaturänderung durch die große Wärmekapazität des Gesamtsystems (Moderator plus Spaltstoff) aufgefangen; bei heterogenen Reaktoren jedoch kommt es innerhalb der Spaltstoffelemente zu plötzlichen sehr hohen Temperatursteigerungen.

Wir betrachten im folgenden den ungünstigsten Fall: ein heterogener Reaktor, bei dem überhaupt keine Wärmeabfuhr aus den Spaltstoffelementen mehr erfolgt, weder während noch nach dem „Neutronenblitz". Sobald die Leistung infolge der starken Temperaturerhöhung wieder zu sinken beginnt und keine überschüssige Reaktivität mehr vorhanden ist, beeinflussen die verspäteten Neutronen auch wieder die Kettenreaktion. Die Leistung wird dann nach und nach wieder auf das stationäre Niveau zurückgehen. Der Endzustand dieser Reaktion ist also: $Q = 0$ und $T = T(\infty)$.

Wir ziehen Gl. (II, 48) heran, um die Temperaturgrenze zu ermitteln, da für die Ableitung dieser Gleichung keine Einschränkung bezüglich der Reaktivität und der Geschwindigkeit der stattfindenden Prozesse gemacht wurde.

Das Verhalten des Reaktors beim Neutronenblitz gehorcht der Funktion in Gl. (II, 38), wobei für diesen Fall

$$D(t) = \beta \qquad \text{(II, 49)}$$

eine gute Näherung ist.

Wir hatten angenommen, daß überhaupt kein Wärmeübergang mehr stattfindet – $A = 0$ –; somit erhalten wir für die Leistungsänderung analog zu Gl. (I, 19):

$$\bar{t} \cdot \frac{d\,Q}{d\,t} = (\delta k - \beta - \Gamma T)\, Q + \beta\, Q_o. \qquad \text{(II, 50)}$$

Für die Änderung der Temperatur gilt:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{C}. \qquad \text{(II. 51)}$$

Die Anfangsbedingungen sind: $Q = Q_0$ und $T = 0$.

Im ersten Augenblick steigt der Neutronenfluß sehr stark an; die Zunahme ist umso größer, je größer die Ausgangsleistung Q_0 ist. Es genügt für diesen Vorgang, in Gl. (II. 50) nur das erste Glied zu berücksichtigen:

$$\bar{t}\, \frac{dQ}{dt} = \delta k \cdot Q_0 \quad \text{und} \quad \frac{dT}{dt} = \frac{Q_0}{C}. \qquad \text{(II. 52)}$$

Das Maß für den Leistungsanstieg $\frac{dQ}{dt}$ ist im Zeitpunkt $t = 0$ gleich $\frac{\delta k}{\bar{t}}$.

Wenn man z. B. $\delta k = 0{,}02$ annimmt, dann ist der Leistungsanstieg $\frac{\delta k}{\bar{t}}$ bereits gleich 10 bis 100 pro Sekunde. Der letzte Summand in Gl.(II, 50) spielt also bereits nach kurzer Zeit keine wesentliche Rolle mehr und ist für die Betrachtung des zweiten Reaktionsabschnittes vernachlässigbar.

Die zeitliche Änderung der Betriebstemperatur T hängt von der spezifischen Leistung $\frac{Q_0}{C}$ ab. Dieses Verhältnis ist selbst bei Vollastbetrieb immer noch klein im Vergleich zu dem Verhältnis $\frac{\delta K}{\tau} = \frac{1}{Q_0}\frac{dQ}{dt}$ der Leistungsänderung. Das bedeutet, daß zu Beginn des Prozesses die Temperatur langsamer ansteigt als die Leistung.

Es soll nun die Zeitkonstante α bestimmt werden, weil wir wissen wollen, in welcher Zeit $\frac{1}{\alpha}$ die Reaktion erfolgt. Außerdem wollen wir die

maximale Leistung Q_{max} wissen. Letztere können wir aus den Gleichungen (II, 50) und (II, 51) ermitteln, wobei in Gl. (II, 50) das Glied βQ_0 vernachlässigt werden darf.

$$Q = \frac{Q_{max}}{\mathfrak{Cof}^2(\alpha t + \varphi)} \quad \text{und} \quad T = T_1 + C_1 \mathfrak{Tg}(\alpha t + \varphi) \tag{II, 53}$$

seien als Lösungen der beiden Gleichungen angesetzt. Für $Q = Q_{max}$ ist $\frac{dQ}{dt} = 0$ und $\varphi = -\alpha\, t_{max}$; die Temperatur zu diesem Zeitpunkt ist nach Gl. (II, 53) gleich T_1. So ergibt sich aus Gl. (II, 50) für T_1:

$$T_1 = \frac{1}{\Gamma}(\delta k - \beta). \tag{II, 54}$$

Setzen wir die Ausdrücke aus Gl. (II, 53) mit dem obigen Wert für T_1 in die Gln. (II, 50) und (II, 51) ein, so erhalten wir die Bestimmungsgleichungen:

$$\Gamma \cdot C_1 = 2\bar{t} \cdot \alpha \quad \text{und} \quad Q_{max} = \alpha \cdot C \cdot C_1. \tag{II, 55}$$

Den Wert für die Konstante C_1 erhalten wir aus den Gln. (II, 48) und (II, 54), indem wir den Fall $t = \infty$ (Endtemperatur) betrachten. Es wird:

$$T_\infty = \frac{1}{\Gamma}(\delta k - \beta) + C_1 = \frac{\delta k}{\Gamma} + \sqrt{\frac{2\tau\, Q_0}{\Gamma \cdot C} + \left(\frac{\delta k}{\Gamma}\right)^2} \tag{II, 56}$$

und

$$C_1 = \frac{\beta}{\Gamma} + \sqrt{\frac{2\tau\, Q_0}{M \cdot C} + \left(\frac{\delta k}{\Gamma}\right)^2}.$$

Dieser Wert für C_1 ergibt, in Gl. (II, 55) eingesetzt, die Zeitkonstante:

$$a = \frac{\Gamma}{2\bar{t}}\left\{\frac{\beta}{\Gamma} + \sqrt{\frac{2\tau\, Q_0}{\Gamma C} + \left(\frac{\delta k}{\Gamma}\right)}\right\} \tag{II, 57}$$

und das Leistungsmaximum:

$$Q_{max} = \frac{C\Gamma}{2\bar{t}}\left\{\frac{\beta}{\Gamma} + \sqrt{\frac{2\tau\, Q_0}{\Gamma C} + \left(\frac{\delta K}{\Gamma}\right)^2}\right\}^2. \tag{II, 58}$$

Die Konstante φ kann aus den obigen Gleichungen nicht bestimmt, sondern muß aus den Anfangsbedingungen gewonnen werden. Da unsere

Lösungsansätze die Differentialgleichungen für $t = 0$ nicht exakt lösen, sondern erst für den etwas späteren Verlauf der Reaktion gültig sind, muß hier auf die Bestimmung von φ verzichtet werden.

Schließlich sei wieder ein Zahlenbeispiel angeführt.

Ein homogener Graphitreaktor (40 t Inhalt) hat die Wärmekapazität $C = 0{,}8 \cdot 10^4$ kcal/°C

$$\begin{aligned} \bar{t} &= 10^{-3}\ \text{sec}, \\ \Gamma &= 10^{-4}/°\text{C}, \\ \delta k &= 0{,}02, \\ Q_0 &= 100\ \text{Mw} = 2{,}4 \cdot 10^4\ \text{kcal/sec}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe der obigen Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= 0{,}07\ \text{sec}, \\ \frac{Q_0}{C} &= 3\ °\text{C/sec}, \\ Q_{max} &= 1{,}3 \cdot 10^5\ \text{Mw}, \\ T_\infty &= 414°\text{C}. \end{aligned}$$

Der Vorgang spielt sich also innerhalb von etwa ein Zehntel Sekunde ab. Es ist fraglich, ob die Spaltstoffelemente einem Temperaturschock von einigen hundert Grad innerhalb solch kurzer Zeit überstehen können und nicht durch die plötzliche Überhitzung zerstört werden.

(Es sei ausdrücklich angemerkt, daß es sich bei einer solchen möglichen Explosion des Reaktorinnern um eine Wärmeexplosion handelt, die mit einer Atomexplosion nicht verwechselt werden darf.)

Das Ergebnis dieses Kapitels ist also:

Die Stabilität eines Reaktors hängt von seiner spezifischen Leistung ab; je kleiner die spezifische Leistung, desto unempfindlicher der Reaktor gegenüber starken, plötzlichen Reaktivitätsschwankungen.

Es ist wichtig, daß die Brennstoffelemente eine kurzfristige starke Temperaturerhöhung aushalten können; die Reaktivität wird durch die hohe Temperatur schleunigst gedämpft, und der Reaktor kommt bald wieder in einen stationären Zustand zurück; er kann, wenn die Brennelemente den Temperaturschock überstanden haben, wieder in Betrieb genommen werden.

5. *Konzentrationsänderungen der Wärmeübertragungsmittel*

Die Wärme wird aus einem Reaktor mit Wasser oder einer anderen Kühlflüssigkeit bzw. mit einem Kühlgas herausgeführt. Die Konzentration dieser Kühlmittel kann schwanken. Bei gasgekühlten Reaktoren z. B. ist es möglich, daß ein Teil des Kühlgases entweicht; Kühlflüssigkeiten können teilweise verdampfen; bei einem Rohrreißer kann Wasser oder Luft in den Reaktorraum eindringen. In jedem Falle wird sich die Reaktivität ändern.

Diese Reaktivitätsänderung hat zwei Ursachen.

1. Alle Kühlstoffe absorbieren Neutronen, so daß eine Änderung ihrer Konzentration eine Änderung der Neutronenabsorption im Gefolge hat.
2. Diese Stoffe wirken alle abbremsend auf Neutronen, so daß sich das Mengenverhältnis zwischen schnellen und langsamen Neutronen ändert.

Im folgenden soll die Reaktivitätsänderung in Abhängigkeit von der Neutronenabsorption dargestellt werden. Nach Bd. I, Gl. (II, 109) ist der f-Faktor ohne Verunreinigung durch die hier betrachteten Substanzen:

$$f_0 = \frac{\sum_u}{\sum_u + \sum_m}.$$

(f = Anzahl der vom Spaltstoff absorbierten Neutronen.)

Fügen wir den Absorptionsquerschnitt $\delta\Sigma^*$ der verunreinigenden Substanzen (Kühlflüssigkeit oder -gas) hinzu, so erhalten wir:

$$f = \frac{\sum_u}{\sum_u + \sum_m + \delta \sum_a^*} = \frac{\sum_u}{\sum_u + \sum_m} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta \sum_a^*}{\sum_u + \sum_m}\right)}. \tag{II, 59}$$

Da die Störung nur geringfügig ist, kann f nach Potenzen von $\frac{\delta \sum_a^*}{\sum_u + \sum_m}$ entwickelt werden. Nach der ersten Potenz wird abgebrochen:

$$f = f_0 \left\{ 1 - (1 - f_0) \frac{\delta \sum_a^*}{\sum_m} \right\}. \tag{II, 60}$$

Ähnlich korrigiert man den p-Faktor für die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit – vgl. Bd. I, Gl. (II, 107) –:

$$p_0 = e^{-\frac{\sum \text{res}}{\sum_s \cdot \zeta}}$$

Die Verunreinigung ergibt einen kleinen zusätzlichen makroskopischen Streuquerschnitt $\delta\Sigma_s^*$ mit einem zugehörigen ζ^*, und der p-Faktor wird:

$$p = e^{-\frac{\sum \text{res}}{\zeta \sum_s + \delta(\zeta^* \sum_s^*)}} = e^{-\frac{\sum \text{res}}{\zeta \sum_s \left(1 + \frac{\delta(\zeta^* \cdot \sum_s^*)}{\zeta \sum_s}\right)}} \tag{II, 61}$$

Man entwickelt nach Potenzen von $\delta(\zeta^* \sum_s^*)$ und bricht nach der ersten Potenz ab:

$$p = e^{-\frac{\sum \text{res}}{\zeta \sum_s}\left\{1 - \frac{\delta(\zeta_s \sum_s^*)}{\zeta \sum_s}\right\}} = p_0 \left\{1 + (1 - p_0) \frac{\delta(\zeta_s \sum_s^*)}{\zeta \sum_s}\right\}. \tag{II, 62}$$

Mit der Näherung: $(1 - p_0) = \frac{\sum \text{res}}{\zeta \sum_s}$.

Die Änderung der Absorption $\delta\Sigma_a$ und der Moderationskraft $\delta(\zeta^* \Sigma_s^*)$ eines Reaktors können beide sowohl negativ als auch positiv sein und mit ihrem Zusammenwirken positive oder negative Reaktivitätsänderungen hervorrufen.

Die Änderung der Reaktivität ergibt sich aus den Gln. (II, 60) und (II, 62) zu:

$$\frac{\delta k}{k_0} = -(1 - f_0) \frac{\delta \sum_a}{\sum_m} + (1 - p_0) \frac{\delta(\zeta \sum_s^*)}{\zeta \sum_s}. \tag{II, 63}$$

Für die Sicherheit eines Reaktors können diese Betrachtungen von entscheidender Bedeutung sein. Bei einem untermoderierten Graphitreaktor z. B. – d. h. $(1 - f_0) \ll (1 - p_0)$ – kann ein Wassereinbruch eine große Reaktivitätszunahme bringen, da $\zeta_{H_2O} = 1$ und das zugehörige $\zeta_C = 0{,}158$ ist. Bei einem gut moderierten Reaktor wird aber stets eine Reaktivitätsminderung erfolgen.

Beispiel:

In einen Graphitreaktor bricht Wasserdampf ein.

$f_0 = 0{,}9$,
$p_0 = 0{,}9$,
$\sigma_{am} = 5 \cdot 10^{-3}\ b$ (mikroskopischer Absorptionsquerschnitt),
$\sigma_{sm} = 4{,}8\ b$ (mikroskopischer Streuquerschnitt),

$\sigma_{aH_2O} = 0{,}33\ b,$
$\sigma_{sH_2O} = 30\ b,$
$N_{H_2O} = 45 \cdot 6 \cdot 10^{23}/\text{m}^3 = 2{,}7 \cdot 10^{19}/\text{cm}^3$ (1 Ata),
$N_{graphit} = 0{,}8 \cdot 10^{23}/\text{cm}^3,$
$\Sigma_{am} = 4 \cdot 10^4/\text{cm},$
$\Sigma_{aH_2O} = 1{,}8 \cdot 10^5/\text{cm},$
$\zeta\Sigma_{sm} = 0{,}062/\text{cm},$
$\zeta\Sigma_{sH_2O} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}/\text{cm}.$

Die Reaktivität ändert sich um:

$$\frac{\delta k}{k_0} = -4{,}5 \cdot 10^{-3} + 0{,}26 \cdot 10^{-3} = -1{,}9 \cdot 10^{-3}.$$

III. Die Vergiftung eines Reaktors

Während des Reaktorbetriebes entstehen aus den schweren Atomkernen des Brennstoffes infolge der Spaltung eine Menge leichterer Atomkerne (Atomgewichte zwischen 80 und 160) als Spaltprodukte. Sie beeinflussen den Reaktorbetrieb auf fünf verschiedene Weisen:

1. Sie tragen die Spaltungsenergie, die sich unmittelbar nach der Spaltung als Bewegungsenergie der Spaltprodukte wiederfindet; sie werden im Kristallgitter der Reaktormaterialien abgebremst und ihre kinetische Energie wird in Wärme umgewandelt.
2. Sie sind die Träger der verspäteten Neutronen, deren Einfluß auf den zeitlichen Ablauf der Kettenreaktion bereits in den vorigen Kapiteln beschrieben wurde.
3. Sie schädigen bei den erwähnten Abbremsprozessen das Kristallgitter unter Umständen bis zu dessen völliger Auflösung.
4. Sie sind radioaktiv und verseuchen ihre Umgebung; daher müssen Reaktoren nach außen sehr gut abgeschirmt werden, um Menschen und andere Lebewesen zu schützen.
5. Viele dieser Spaltprodukte haben einen großen Absorptionsquerschnitt gegen thermische Neutronen und stören daher empfindlich den Neutronenhaushalt.

Mit dem letzten Effekt, auch Vergiftung genannt, wollen wir uns im folgenden befassen.

Die nächste Tabelle bringt alle Spaltprodukte, die zu der Vergiftung einen wesentlichen Beitrag liefern, mit den zugehörigen Absorptionsquerschnitten, Halbwertszeiten und ihrem Anteil pro Spaltung.

Tabelle 2

Gruppe I	Absorptions-querschnitt	Halbwertszeit des Isotops	Halbwertszeit des Vorgängers	Spaltungsausbeute (%) U^{233}	U^{235}	Pu^{239}
Xe^{135}	$3{,}4 \cdot 10^6$ barn	9,2 h	6,7 h	6,6	6,4	5,3
Sm^{149}	$6{,}6 \cdot 10^4$	stabil	50 h	0,7	1,15	1,8
Sm^{151}	$1{,}2 \cdot 10^4$	80 a	27 h	0,5	0,73	1,98
Cd^{113}	$2{,}5 \cdot 10^4$	stabil	5,3 h	0,02	0,011	0,075
Eu^{155}	$1{,}4 \cdot 10^4$	stabil	23 min	0,015	0,031	0,22
Gruppe II						
Eu^{153}	420 barn	stabil	47 h	0,1	0,15	0,8
Kr^{83}	205	stabil	2,3 h	1,2	0,54	0,05
In^{115}	197	stabil	54 h 43 d	0,02	0,01	0,05
Nd^{143}	300	stabil	13,8 d	5,1	5,9	6,0

Die erste Gruppe umfaßt alle Spaltprodukte mit großem Absorptionsquerschnitt ($\sigma > 10^4$ barn). Die zweite Gruppe weist Einfangquerschnitte zwischen 100 und 500 barn auf. Die zugehörigen Spaltungsausbeuten sind ganz rechts auf der Tabelle eingetragen. Es sind noch weitere Gruppen von Spaltprodukten mit Absorptionsquerschnitten zwischen 10 und 100 barn (9 Kernsorten) bzw. zwischen 5 und 10 barn (8 Kernsorten) bekannt, die wegen ihres geringen Einflusses auf die Kettenreaktion hier nicht aufgeführt sind.

Alle Spaltprodukte außer Samarium^{151} und Xenon^{135} sind stabil (d. h. $\lambda = 0$); Xenon nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als es eine verhältnismäßig kurze Halbwertszeit hat (9,2 Stunden). Dagegen darf Samarium mit seiner Halbwertszeit von 80 Jahren mit ausreichender Genauigkeit als stabil betrachtet werden, da dieser Zeitraum, verglichen mit der Lebensdauer der Brennelemente, sehr groß ist.

Die Xe^{135}-Vergiftung

Die Spaltprodukte mit der Massenzahl 135 haben folgende Zerfallsreihe:

$$Te^{135} \xrightarrow{2\,min} J^{135} \xrightarrow{6{,}7\,h} Xe^{135} \xrightarrow{9{,}2\,h} Cs^{135} \xrightarrow{2{,}10^4\,a} Ba^{135}.$$

Die Elemente gehen durch Betazerfall ineinander über; die Zahlen über den Pfeilen bedeuten die jeweilige Halbwertszeit. Die Umwandlung von

Tellur in Jod geht so rasch vor sich (Halbwertszeit: 2 min), daß für die Praxis die Annahme ausreicht, Jod entstehe mit einer entsprechend höheren Spaltungsausbeute direkt beim Auseinanderbrechen der schweren Kerne.

Wird die Konzentration des J^{135} mit X_1, der zugehörige Absorptionsquerschnitt mit σ_1, die Zerfallskonstante mit λ_1 und die Spaltungsausbeute mit γ_1 bezeichnet, dann ergibt sich für die zeitliche Veränderung der J^{135}-Konzentration:

$$\frac{d\,X_1}{dt} = \gamma_1\, \Sigma_{sp}\, \Phi - \sigma_1\, \Phi\, X_1 - \lambda_1\, X_1. \tag{III, 1}$$

Der erste Summand stellt die Spaltausbeute pro cm^3 und sec dar; der zweite gibt die pro cm^3 und sec durch Neutroneneinfang vernichteten J^{135}-Kerne an und kann gegen den großen dritten Summanden, der die Vernichtung der J^{135}-Kerne durch Betazerfall beschreibt, vernachlässigt werden.

Die Lösung der Gleichung (III, 1) ist:

$$X_1 = \frac{\gamma_1 \sum_{sp} \Phi}{\lambda_1} \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right). \tag{III, 2}$$

Nach etwa zwei bis drei Halbwertszeiten wird die stationäre J^{135}-Konzentration $X_{1\infty}$ erreicht. Sie ist:

$$X_{1\,\infty} = \gamma_1 \frac{\sum_{sp} \Phi}{\lambda_1}. \tag{III, 3}$$

Für die Konzentration des Xe^{135} erhalten wir analog zu Gl. (III, 1):

$$\frac{d\,X_2}{dt} = \gamma_2\, \Sigma_{sp}\, \Phi + \lambda_1 X_1 - \sigma_2\, X_2\, \Phi - \lambda_2\, X_2. \tag{III, 4}$$

Es ist der Summand $\lambda_1 X_1$ hinzugekommen, der die Anzahl der Betaübergänge pro cm^3 und sec von J^{135} nach Xe^{135} darstellt. Als stationäre Konzentration für Xe^{135} erhalten wir analog zu Gl. (III, 3) aus Gl. (III, 4):

$$X_2 = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \sum_{sp} \Phi}{\sigma_2\, \Phi + \lambda_2}. \tag{III, 5}$$

Als Vergiftung bezeichnet man im allgemeinen die Größe:

$$P = \frac{\sigma_x\, X}{\sum_{sp}}. \tag{III, 6}$$

(σ_x = Absorptionsquerschnitt des Spaltprodukts von der Konzentration X.)

Die Xenonvergiftung ist also:

$$P = (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\sigma_2 \Phi}{\sigma_2 \Phi + \lambda_2}. \qquad \text{(III, 7)}$$

Für kleine Neutronenflüsse ist Φ: $P \approx (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\sigma_2 \Phi}{\lambda_2}$.

Für große Φ ist $P \approx (\gamma_1 + \gamma_2) = 0{,}059$.

Die nachstehende Tabelle bringt die Xe^{135}-Vergiftung in Abhängigkeit vom Neutronenfluß.

Tabelle 3

Φ =	10^{11}	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}
P =	$0{,}9 \cdot 10^{-3}$	$8{,}3 \cdot 10^{-3}$	$3{,}65 \cdot 10^{-2}$	$5{,}6 \cdot 10^{-2}$	$5{,}9 \cdot 10^{-2}$

Außer dem obenbeschriebenen Neutronenverlust durch Absorption an den Xe^{135}-Kernen gibt es noch eine andere unangenehme Erscheinung, die das Xenon hervorruft; dieser Effekt tritt nach dem Abschalten eines Reaktors auf. In diesem Falle werden zunächst noch Xe^{135}-Kerne aus den vorhandenen J^{135}-Kernen nachgeliefert, aber keine Xe^{135}-Kerne mehr durch Neutroneneinfang umgewandelt. Es findet also eine erhebliche Überproduktion an Xe^{135}-Kernen statt, so daß nach einigen Stunden die Vergiftung so groß ist, daß der Reaktor nicht wieder angeschaltet werden kann.

Aus Gln. (III, 1) und (III, 4) ergibt sich für die Xenon- und die Jodkonzentration nach Abschalten des Reaktors (d. h. $\Phi = 0$):

$$X_1 = X_{10} \cdot e^{-\lambda_1 t} \qquad \text{(III, 8)}$$

und

$$X_2 = \left\{ \frac{\gamma_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{\lambda_2 + \sigma_2 \Phi_0} e^{-\lambda_2 t} \right\} \sum_{sp} \Phi. \qquad \text{(III, 9)}$$

Diese Funktion hat ein Maximum für die Zeit $t = 10$ h. Mit den entstehenden Anteilen $\gamma_1 = 0{,}056$ und $\gamma_2 = 0{,}003$, der zugehörigen Zerfallskonstanten $\lambda_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-5}$/sec und $\lambda_2 = 2{,}1 \cdot 10^{-5}$/sec und dem Absorptionsquerschnitt $\sigma_2 = 3{,}5 \cdot 10^{-18}$ ergeben sich Vergiftungen, die zu Reaktivitätsverlusten bis zu 40% führen. Eine Wiederaufnahme des Reaktorbetriebs zu diesem Zeitpunkt ist unmöglich.

Das entstandene Xe^{135} hat eine Halbwertszeit von 9,2 Stunden, ist also nach etwa 20 bis 30 Stunden so weit zerfallen, daß der Reaktor wieder angefahren werden kann.

Ähnliche Erscheinungen treten auch bei Laständerungen auf, wenn der Neutronenfluß für eine Zeitlang abnimmt und wieder hochgefahren werden soll. Der „Fahrplan" eines Reaktors kann aber so aufgestellt werden, daß die Xenonvergiftung den Betrieb nicht hindert. Das übliche Lastdiagramm eines Kraftwerks, mit Wechselbelastungen in Perioden von 8 bis 12 Stunden, ist der Periode von Xenonerzeugung und -zerfall so angepaßt, daß immer zum richtigen Zeitpunkt gerade die notwendige Reaktivität zur Verfügung steht, solange der Reaktor nicht abgeschaltet wird, sondern immer noch mit einer Teillast von 30 bis 40% läuft. Die Zerfallszeiten von Xe^{135} (9,2 h) und J^{135} (6,7 h) ergeben eine Periode von 10 bis 12 Stunden.

Man kann den Vorgang auch so beschreiben: Die Xenonvergiftung erleidet eine „Phasenverschiebung" von 90°, so daß bei Vollast des Reaktors die Xenonvergiftung klein ist, bei kleinerer Reaktorleistung dagegen größer.

Diese Erscheinungen, die auch noch mit dem leistungsabhängigen Temperatureinfluß auf die Reaktivität verknüpft sind, lassen sich nur mit komplizierten mathematischen Gleichungssystemen darstellen, die am besten mit elektronischen Analogrechenmaschinen gelöst werden.

Vergiftung durch stabile Spaltprodukte

Die Vergiftung durch die übrigen in der Tabelle 2 aufgeführten Spaltprodukte läßt sich in folgender Weise ermitteln. Für die Vorgänger in der Zerfallsreihe der betrachteten Spaltprodukte gilt wieder die Gleichung (III, 1), wobei das Absorptionsglied $-\sigma_1 \Phi X_1$ gegen das Zerfallsglied $\lambda_1 X_1$ in allen Fällen vernachlässigbar klein ist.

$$\frac{d X_1}{dt} = \gamma_1 \textstyle\sum_{sp} \Phi - \lambda_1 X_1. \qquad \text{(III, 10)}$$

Die Lösung lautet:

$$X_1 = \frac{\gamma_1 \sum_{sp} \Phi}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}). \qquad \text{(III, 11)}$$

Anhand der Tabelle für die Spaltprodukte überzeugen wir uns, daß die Halbwertszeiten der Vorgänger von Spaltprodukten mit hohem Absorptionsquerschnitt klein sind im Vergleich zu der Lebensdauer der Brenn-

elemente. Es darf daher angenommen werden, daß eine Gleichgewichtskonzentration vorliegt. Aus Gl. (III, 11) wird:

$$X_{1\infty} = \frac{\gamma_1 \sum_{sp} \Phi}{\lambda_1}. \qquad \text{(III, 12)}$$

Analog zu Gl. (III, 4) erhalten wir für die Konzentrationsänderung der vergiftenden Spaltprodukte die Gleichung:

$$\frac{d\,X_2}{dt} = \gamma_2\, \Sigma_{sp}\, \Phi + \lambda_1 X_1 - \sigma_2\, \Phi\, X_2. \qquad \text{(III, 13)}$$

Es ist berücksichtigt, daß alle betrachteten Spaltprodukte stabil sind ($\lambda_2 = 0$). Die Lösung von Gl. (III, 13) ist mit dem Wert für X_1 aus Gl. (III, 12):

$$X_2 = (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\sum_{sp}}{\sigma_2} (1 - e^{-\sigma_2 \Phi t}). \qquad \text{(III, 14)}$$

Die zugehörige Vergiftung heißt:

$$P = \gamma\,(1 - e^{-\sigma_2 \Phi t})$$

$$\text{mit } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2. \qquad \text{(III. 15)}$$

γ ist die in der Tabelle 2 angegebene Spaltausbeute für das betreffende Spaltprodukt.

Die Vergiftung durch ein bestimmtes Spaltprodukt läßt sich also mit einer einfachen Exponentialfunktion darstellen.

Die Größe $\sigma_2\, \Phi$ bestimmt die Zeit, nach der mit dem Einsetzen der jeweiligen Vergiftung zu rechnen ist. Zum Vergleich mit diesem Zeitraum sei diejenige Zeit herangezogen, die erforderlich ist, um in einem bestimmten Volumen den Spaltstoff einmal umzusetzen. Die Konzentration des Brennstoffs sei durch Brutprozesse (s. nächstes Kapitel) oder durch Brennstoffnachschub konstant gehalten. Dann ist:

$$N \sigma_{sp}\, (1 + \alpha)\, \Phi t \qquad \text{(III, 16)}$$

die Anzahl der verbrauchten Spaltstoffatome pro cm³ während der Zeit t bei einer Spaltstoffkonzentration N und einem Neutronenfluß Φ. $\sigma_a = \sigma_{sp}\, (1 + \alpha)$ ist der Gesamtabsorptionsquerschnitt des Brennstoffs. Wenn der Brennstoff einmal umgesetzt ist, dann ist die Anzahl der verbrauchten Brennstoffatome gleich der Brennstoffkonzentration N:

$$N\, \sigma_{sp}\, (1 + \alpha)\, \Phi t = N. \qquad \text{(III, 17)}$$

Hieraus ergibt sich für die Dauer des Umsetzprozesses:

$$t = \frac{1}{\Phi \sigma_{sp}(1 + \alpha)}. \qquad \text{(III, 18)}$$

Wir vergleichen diesen Zeitraum mit der Zeit τ, in der die Vergiftung nach Gl. ((III, 15) auf den Wert $P = \gamma(1 - e^{-1}) = 0{,}632\,\gamma$ angestiegen ist.

$$\tau = \frac{1}{\sigma_2 \Phi}, \qquad \text{da: } \sigma_2 \Phi \tau = 1. \qquad \text{(III, 19)}$$

Das Verhältnis aus diesen beiden Zeiträumen heißt:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{sp}(1 + \alpha)}. \qquad \text{(III, 20)}$$

Für den Brennstoff U^{233} z. B. ist $\sigma_{sp}(1 + \alpha) = 581$ barn.

Betrachten wir in der Tabelle 2 die erste Gruppe der Spaltprodukte, deren Absorptionsquerschnitte größer als 10^4 barn sind, dann ist:

$$\frac{t}{\tau} > 17{,}2, \quad \text{d. h.} \quad t > 17{,}2\,\tau. \qquad \text{(III, 21)}$$

Daraus folgt, daß die Vergiftung durch die Spaltprodukte mindestens siebzehnmal so schnell ansteigt wie der Brennstoff umgesetzt wird. In der Praxis muß man also mit dieser Art von Vergiftung von Anfang an rechnen und die entsprechenden Beträge aus Gruppe I der Tabelle zu der xenonvergiftung hinzunehmen. Dieser zusätzliche Betrag ist nach dieser Tabelle:

$$P_{ges} = 0{,}01235 \quad \text{für} \quad U^{233}.$$

Eine ähnliche Überlegung für die zweite Gruppe von Spaltprodukten, wie sie in der Tabelle angeführt sind, zeigt, daß die zugehörige Vergiftung in einem etwa doppelt bis dreimal so großem Zeitraum ansteigt wie der Brennstoffumsatz. Besonders zu beachten ist hier das Nd^{143} mit seiner relativ hohen Spaltausbeute.

Alle anderen Gruppen mit Absorptionsquerschnitten, die kleiner als 100 barn sind, machen sich erst in sechsmal so großen Zeiträumen wie die Dauer des Brennstoffumsatzes bemerkbar. Ihr Einfluß kann erfahrungsgemäß bei dem heute erreichbaren Ausnutzungsgrad des Brennstoffs unberücksichtigt bleiben.

IV. Brut- und Konversionsfragen

1. *Brut- und Konversionsvorgänge*

Bei der Spaltung schwerer Kerne werden durchschnittlich mehr als zwei Neutronen pro Spaltung frei. Zur Aufrechterhaltung der Kettenreaktion ist nur eines dieser beiden Neutronen nötig. Es bleibt also pro Spaltung mehr als ein Neutron übrig.

Bringt man in einen Reaktor einen geeigneten Stoff (z. B. U^{238} oder Th^{232}) ein, so können die überschüssigen Neutronen sich an die Atomkerne dieser Stoffe anlagern und sie zu Spaltstoffen verwandeln. Diesen Prozeß nennt man das „Brüten", und die Stoffe, aus denen neuer Spaltstoff gewonnen wird, „Brutstoffe". Es ist üblich von Blutprozessen zu sprechen, wenn Ausgangsspaltstoff und gebrüteter Spaltstoff einander gleich sind; die Erzeugung eines anderen Spaltstoffes als des Ausgangsbrennstoffs im Reaktor heißt Konversion. Diese Möglichkeit gleichzeitig Energie und neuen Brennstoff zu gewinnen, ist für die Wirtschaftlichkeit von Atomkraftwerken von großer Bedeutung.

Die folgende Übersicht gibt für die bekannten spaltbaren Atomkernarten die Neutronenergiebigkeit η an:

Kernsorte	U^{235}	U^{233}	Pu^{239}
η =	$2{,}08 \pm 0{,}02$	$2{,}31 \pm 0{,}03$	$2{,}03 \pm 0{,}03$

Auf jedes im Spaltstoff eingefangene Neutron kommen η schnelle Neutronen (s. Bd. I). Für die Neuerzeugung von Spaltstoff ist also U^{233} am besten geeignet, da ein Überschuß von 1,31 Neutronen zur Verfügung steht.

Aus den Brutstoffen U^{238} und Th^{232} entstehen durch Anlagerung eines Neutrons pro Kern die Spaltstoffe Pu^{239} und U^{233}. Es ist also möglich, daß trotz aller Neutronenverluste (s. Bd. I, S. 96ff.) genau so viel oder mehr Spaltstoff erzeugt werden kann, wie verbraucht wird.

Wir betrachten die Umwandlungen genauer. Durch den Einfang eines Neutrons geht U^{238} zunächst in U^{239} über, das seinerseits durch zweimaligen Betaübergang in Pu^{239} umgewandelt wird:

$$U^{238} + n \longrightarrow U^{239} \xrightarrow[23{,}5\,\text{min}]{\beta} Np^{239} \xrightarrow[2{,}33\,\text{d}]{\beta} Pu^{239}.$$

Ein Teil der so erzeugten Atomkerne mit der Massenzahl 239 geht dadurch verloren, daß auch Np^{239} mit einem Wirkungsquerschnitt von etwa 60 barn Neutronen absorbieren kann und in Np^{240} umgewandelt wird. Da dieses und seine Nachfolger kaum einmal gespalten wird, ist die Umwandlung in Np^{240} ein echter Neutronenverlust. Die Umwandlung von U^{239} in U^{240} ist selten und für die Praxis ohne Bedeutung.

Wir bezeichnen die Konzentration der Np^{239}-Kerne einfach mit Np; $\lambda_{Np} \cdot \mathrm{Np}$ ist die Anzahl der durch Betazerfall in Pu^{239} umgewandelten Kerne; gleichzeitig gehen $\sigma_{Np}\, Np\, \Phi$ Neptuniumkerne in Np^{240} über.

Der Bruchteil an verlorenen Neptuniumkernen ist also:

$$r = \frac{\lambda_{Np}\, Np}{\lambda_{Np}\, Np + \sigma_{Np}\, Np\, \Phi} = \frac{\lambda_{Np}}{\lambda_{Np} + \sigma_{Np}\, \Phi}. \qquad \text{(IV, 1)}$$

Um sich ein Bild von dem Umfang dieses Verlustes zu machen, sei ein Zahlenbeispiel angeführt:

$$\Phi = 10^{14}/\mathrm{cm}^2\,\mathrm{sec}; \quad \sigma_{Np} = 60 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2; \quad \lambda_{Np} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}/\mathrm{sec}.$$

Dann ist:

$$r = 0{,}998.$$

Der Verlust ist also unbeträchtlich.

Die Umwandlung von Th^{232} in U^{233} hat folgende Stationen:

$$Th^{232} + n \longrightarrow Th^{233} \xrightarrow[23{,}3\ \mathrm{min}]{\beta} Pa^{233} \xrightarrow[27{,}4\ \mathrm{d}]{\beta} U^{233}.$$

Auch hier ist wieder ein Verlust zu berücksichtigen. Pa^{233} hat einen Einfangquerschnitt gegen Neutronen von etwa 68 barn und wandelt sich in das Isotop Pa^{234} um. Da Protaktinium eine Halbwertszeit von 27,4 Tagen hat, ist die Reaktionswahrscheinlichkeit entsprechend hoch.

Für den Verlust gilt auch hier die Gleichung (IV, 1). Zur Veranschaulichung sei für diesen Fall ebenfalls ein Zahlenbeispiel angeführt:

$$\Phi = 10^{14}/\mathrm{cm}^2\,\mathrm{sec}; \quad \lambda_{pa} = 3 \cdot 10^{-7}/\mathrm{sec}; \quad \sigma_{pa} = 68 \cdot 10^{-24}/\mathrm{cm}^2;$$
$$r = 0{,}977.$$

Der Verlustfaktor ist also so gering, daß wir ihn für die folgenden Betrachtungen nicht berücksichtigen wollen.

Die Kennzahl für die Ergiebigkeit bei der Neuerzeugung von Spaltstoff ist der Konversions- oder Brutfaktor. Er ist gleich dem Verhältnis zwischen dem neuerzeugten und dem verbrauchten Spaltstoff.

Es können sowohl schnelle als auch thermische Neutronen im Brutstoff angelagert werden.

Wenn Σ_b der mittlere makroskopische Absorptionsquerschnitt des Brutstoffs gegen thermische Neutronen und Φ der Neutronenfluß ist, dann werden pro cm³ und sec $\Sigma_b \cdot \Phi$ Neutronen dieser Art eingefangen. Diese Zahl gibt gleichzeitig die Rate der auf diesem Wege neuerzeugten Spaltstoffatome an.

Andrerseits ist die Anzahl der schnellen Neutronen, die im Brutstoff eingefangen werden und neuen Spaltstoff erzeugen: $\nu \, \Sigma_{sp} \, \varepsilon \, \Phi \, P_s \, (1 - p)$. Dabei ist $\nu \, \Sigma_{sp} \, \Phi \, \varepsilon$ die Zahl der pro cm³ und sec erzeugten schnellen Neutronen. P_s heißt die „Nichtausflußwahrscheinlichkeit" der schnellen Neutronen (s. Bd. I, S. 90); multipliziert man diese Größe mit der Zahl der erzeugten schnellen Neutronen, so erhält man die Gesamtheit der im Reaktor verbleibenden schnellen Neutronen, von denen der Bruchteil $(1 - p)$ im Brutstoff eingefangen wird.

Dem gegenüber steht der Verlust an Brennstoff, der durch $(\Sigma_{sp} + \Sigma_\gamma)\Phi$ gegeben ist. (Σ_γ = makroskopischer Absorptionsquerschnitt für γ-Einfang von Neutronen; Σ_{sp} = makroskopischer Absorptionsquerschnitt für Spaltungseinfang im Brennstoff.)

Wir bilden das Verhältnis von Spaltstoffgewinn zu Spaltstoffverlust und erhalten den Konversions- oder Brutfaktor:

$$C = \frac{\Sigma_b \, \Phi + \nu \, \Sigma_{sp} \, \varepsilon \, \Phi \, P_s \, (1 - p)}{\Sigma_{sp} \, (1 + \alpha) \, \Phi} = \frac{\Sigma_b}{\Sigma_{sp} \, (1 + \alpha)} + \frac{\nu \, \varepsilon \, P_s \, (1 - p)}{(1 + \alpha)}. \quad \text{(IV, 2)}$$

Die Größe $\alpha = \dfrac{\Sigma_\gamma}{\Sigma_{sp}}$ ist in Bd. I, S. 103 eingeführt.

Die Bilanz der thermischen Neutronen kann auf folgende Weise geschrieben werden:

$$\nu \, \Sigma_{sp} \, \varepsilon \, P_s \, p \, \Phi = \left\{ \Sigma_{sp} \, (1 + \alpha) + \Sigma_b + \Sigma_m \, (1 + B^2 \, L_m^2) + \Sigma_v \right\} \Phi. \quad \text{(IV, 3)}$$

Die linke Seite der Gl. (IV, 3) stellt die pro cm³ und sec durch Spaltung und Abbremsung erzeugte Anzahl von thermischen Neutronen dar. Die einzelnen Summanden der rechten Seite bedeuten die Neutronenverluste durch Absorption pro cm³ und sec an Spaltstoffkernen (Σ_{sp} $(1 + \alpha)$), Brutstoff (Σ_b), Moderator (Σ_m) und vergiftenden Spaltprodukten (Σ_v); das Glied $\Sigma_m \, B^2 \, L^2{}_m$ stellt den Ausfluß von thermischen Neutronen aus dem Moderator dar.

Diese Darstellung ist mit der des Multiplikationsfaktors $k_{eff} = 1$ identisch und ergibt sich nach einigen Umrechnungen unter Benutzung der Gl. (II/155) aus Bd. I.

Aus Gl. (IV, 3) gewinnen wir durch Division mit $\Sigma_{sp}(1+\alpha)\,\Phi$:

$$\frac{\nu\,\varepsilon\,P_s\,p}{(1+\alpha)} = 1 + \frac{\sum_b}{\sum_{sp}(1+\alpha)} + \frac{\sum_m\left(1+B^2\,L_m^2\right)}{\sum_{sp}(1+\alpha)} + \\ + \frac{\sum_v}{\sum_{sp}(1+\alpha)}. \qquad \text{(IV, 4)}$$

Diese Beziehung wird in Gl. (IV, 2) eingeführt und ergibt für den thermischen Konversions- und Brutfaktor:

$$C = \frac{\nu\,\varepsilon\,P_s}{(1+\alpha)} - 1 - \frac{\sum_m\left(1+B^2\,L_m^2\right)}{\sum_{sp}(1+\alpha)} - \frac{\sum_v}{\sum_{sp}(1+\alpha)} + \\ = \eta\cdot\varepsilon\cdot P_s - 1 - \frac{\sum_m\left(1+B^2\,L_m^2\right)}{\sum_{sp}(1+\alpha)} - \frac{\sum_v}{\sum_{sp}(1+\alpha)}. \qquad \text{(IV, 5)}$$

Die Ableitung von Gl. (IV, 5) gilt streng genommen nur für den homogenen Reaktor; sie ist aber auch für heterogene Reaktoren anwendbar, wenn die entsprechenden Absorptionsquerschnitte mit den zugehörigen mittleren Neutronenflüssen der verschiedenen Medien (s. Bd. I, S. 137ff.) multipliziert werden.

Der Ausdruck für den Konversionsfaktor in Gl. (IV, 5) enthält die Größe p nicht mehr. Das bedeutet, daß die Neuerzeugung des Spaltstoffs vom Neutronenspektrum (Energieverteilung der Neutronen) nur über die Nichtausflußwahrscheinlichkeit P_s der schnellen Neutronen und die verschiedenen Absorptionsquerschnitte abhängt. Mit steigender Ausnutzung des ursprünglich eingesetzten Spaltstoffs wird der Konversionsfaktor C durch Spaltproduktvergiftung immer kleiner (s. Kap. III ds. Bds.).

In Reaktoren mit wenig Moderatorsubstanz (untermoderierte Reaktoren) oder in schnellen Reaktoren verändern sich die Summanden der rechten Seite von Gl. (IV, 5) bei einer höheren mittleren Neutronenenergie erheblich. Für die bekannten Spaltstoffe hat α die Tendenz, mit steigender mittlerer Neutronenenergie nach einigen Schwankungen kleiner zu werden. Auch der Vermehrungsfaktor ε für die Erzeugung schneller Neutronen aus dem Brutstoff mit schnellen Neutronen wird größer. Der dritte Summand in Gl. (IV, 5), der die Absorption im Moderatorstoff angibt, wird bei verminderter moderierender Kraft kleiner. Der letzte Summand läßt sich unter diesen Umständen auch kleiner machen. Daraus ergibt sich, daß schnelle Reaktoren eine besonders gute Spaltstoffbilanz haben. In ihnen lassen sich bestimmt Brutfaktoren erzielen, die größer als eins sind.

Das Energiegebiet zwischen thermischen und schnellen Reaktoren heißt der intermediäre Energiebereich. Hierfür sind die Ausbeuten bei den Brut- und Konversionsprozessen noch nicht eindeutig geklärt. Der Einfang von intermediären Neutronen durch vergiftende Spaltprodukte scheint aber so ungünstig zu sein, daß in diesem Bereich die Neutronenbilanz besonders schlecht ist.

2. *Einfluß der Brut- und Spaltstoffkonzentration auf den Brut- bzw. Konversionsprozeß*

Die in Gl. (IV, 5) angegebenen makroskopischen Absorptionsquerschnitte ändern sich während des Brutprozesses beständig mit der Konzentration der einzelnen Reaktormaterialien. Wir betrachten zunächst die *Brutvorgänge*. Es gibt hier den U^{233}–Th^{232}-Kreislauf und den Pu^{239}–U^{238}-Kreislauf.

Die Konzentration des Spaltstoffs (U^{233} oder Pu^{239}) sei X; die Konzentration des Brutstoffs werde mit Y bezeichnet. Die Wirkungsquerschnitte erhalten entsprechende Indices. Die zeitliche Änderung der Spaltstoffkonzentration ist gegeben durch:

$$\frac{dX}{dt} = \left\{ \Sigma_y^a \Phi + \nu\varepsilon \Sigma_x^{sp} P_s (1-p) \Phi \right\} - \Sigma_x^a \Phi =$$

$$= \left\{ \sigma_y^a Y + \nu\varepsilon P_s X (1-p) \sigma_x^{sp} \right\} \Phi - X \sigma_x^a \Phi. \tag{IV, 6}$$

Sie setzt sich zusammen aus folgenden zeitlich veränderlichen Größen:

1. der Zuwachs an Spaltstoff durch thermischen Neutroneneinfang im Brutstoff,
2. der Zuwachs an Spaltstoff durch schnellen Neutroneneinfang im Brutstoff,
3. der Spaltstoffverbrauch durch Einfang im Spaltstoff mit und ohne Spaltung.

Außer Gl. (IV, 6) für die Spaltstoffkonzentrationsänderung läßt sich eine Gleichung für die Änderung der Brutstoffkonzentration aufstellen. Für alle praktischen Fälle kann man jedoch annehmen, daß die Brutstoffkonzentration konstant bleibt, da sie wegen der kleinen Absorptionsquerschnitte der Brutstoffe sehr hoch sein muß und sich deshalb nur sehr wenig ändert.

Wir wollen nun Gl. (IV, 6) interpretieren und addieren zu diesem Zweck auf beiden Seiten der Gleichung die Größe $\Sigma_x^a \Phi$, durch die wir gleichzeitig dividieren.

Ein Vergleich mit Gl. (IV, 2) ergibt:

$$\frac{\frac{dX}{dt}}{\Sigma_x^a \Phi} + 1 = C \qquad \text{(IV, 7)}$$

oder

$$\frac{\frac{dX}{dt}}{\Sigma_x^a \Phi} = C - 1. \qquad \text{(IV, 8)}$$

Die Änderung der Spaltstoffkonzentration, bezogen auf den Spaltstoffverbrauch, ist also größer oder kleiner als Null, je nachdem ob der Konversionsfaktor kleiner oder größer ist als eins.

Gleichung (IV, 6) soll nun gelöst werden. Wir setzen:

$$\nu \cdot \varepsilon \cdot P_s\,(1 - p)\,\sigma_x^{sp} - \sigma_x^a = -\sigma^*. \qquad \text{(IV, 9)}$$

Dann wird

$$\frac{dX}{dt} = \sigma_y^a\, Y \Phi - \sigma^* X \Phi. \qquad \text{(IV, 10)}$$

Ist X_0 die Anfangskonzentration, dann ergibt sich als Lösung:

$$X = \frac{\sigma_y^a}{\sigma^*} \cdot Y\,(1 - e^{-\sigma^* \Phi t}) + X_0\, e^{-\sigma^* \Phi t}. \qquad \text{(IV, 11)}$$

Nach einiger Zeit – etwa $\frac{3}{\sigma^* \Phi}$ sec – nähert sich X der Sättigungskonzentration:

$$X_\infty = \frac{\sigma_y^a}{\sigma^*}\, Y. \qquad \text{(IV, 12)}$$

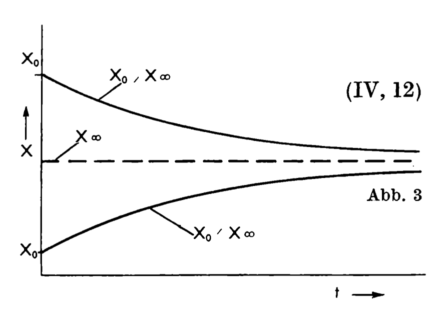


Abb. 3

Je nachdem, ob die Anfangskonzentration höher oder niedriger als die Sättigungskonzentration ist, fällt oder steigt die Kurve für die Spaltstoffkonzentration (s. Schaubild).

Es ist interessant zu untersuchen, ob im Falle $X(0) = X_\infty =$ konst ein Reaktor kritisch gehalten werden kann. In diesem Falle läge ein echter Brutprozeß vor, d. h. der Reaktor würde genau so viel Spaltstoff erzeugen wie er verbraucht; es wäre nur notwendig, zur Aufrechterhaltung des Betriebes den Brutstoff zu ergänzen.

Um diese Frage zu prüfen, wird Gl. (IV, 12) in die kritische Bedingung (s. Gl. (IV, 4)) eingesetzt. Es ist dabei zu berücksichtigen, daß Σ_v eine mit der Zeit ansteigende Größe ist; sie soll durch einen Mittelwert abgeschätzt und eingesetzt werden.

$$\frac{\nu \cdot \varepsilon P_s p}{1+\alpha} = 1 + \frac{\nu P_s \varepsilon p - \nu\varepsilon P_s + (1+\alpha)}{1+\alpha} + \\ + \frac{\sum_m (1 + B^2 L^2{}_m) + \sum_v}{\sum_{sp}(1+\alpha)}. \tag{IV, 13}$$

Eine Umformung ergibt:

$$\frac{\nu \varepsilon P_s}{1+\alpha} = 2 + \frac{\sum_m (1 + B^2 L^2{}_m) + \sum_v}{\sum_{sp}(1+\alpha)} \tag{IV, 14}$$

$$\text{bzw. } \nu \varepsilon P_s = 2(1+\alpha) + \frac{\sum_m (1 + B^2 L^2{}_m) + \sum_v}{\sum_{sp}}.$$

Dieses Resultat bedeutet, daß pro Spaltung außer den beiden Neutronen für die Aufrechterhaltung der Kettenreaktion und den Bruteffekt noch ein gewisser Bruchteil an Neutronen für die Absorption in den Reaktorbaustoffen (Σ_m) den Ausfluß der thermischen Neutronen und die Vergiftungsverluste erzeugt werden muß. Diese Bedingung kann selbst für den besten thermischen Spaltstoff, U^{233}, nur annähernd erreicht werden, wenn der Ausfluß von thermischen und schnellen Neutronen klein ist. Den Neutronenausfluß kann man nur in entsprechend großen Reaktoren kleinhalten.

Es scheint daher wirtschaftlicher zu sein, auf einen großen Brutfaktor zu verzichten und kleinere Reaktoren mit hoher Leistungsdichte zu bauen, deren Anlagekosten niedriger sind als die der großen Reaktoren. Den mehrverbrauchten Spaltstoff muß man dann beständig ergänzen.

Es soll abgeschätzt werden, wieviel an Brennstoff dauernd zugesetzt werden muß.

In Gl. (IV, 10) führen wir ein ergänzendes Quellglied ein, das angibt, wieviel Spaltstoff pro cm³ und sec zugegeben werden muß, um den Reaktorbetrieb entsprechend Gl. (IV, 13) aufrecht zu halten; der Spaltstoffgehalt bleibt dabei konstant.

Der Einfluß Σ_v der Vergiftung soll durch ein konstantes Schätzglied Σ_v mit genügender Genauigkeit dargestellt sein. Aus Gl. (IV, 10) wird dann:

$$\frac{dX}{dt} = \sigma_y^a\, Y\Phi - \sigma^*\, X\Phi + Q = O \qquad \text{(IV, 15)}$$

und daraus: $\sigma_y^a \cdot Y\Phi = \sigma^*\, X\Phi - Q.$ (IV, 16)

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (IV, 3) ein, so ergibt sich nach einigen Umwandlungen:

$$\left\{\nu\,\varepsilon\, P_s\, p - (1+\alpha)\right\} \textstyle\sum_{sp}\Phi \qquad \text{(IV, 17)}$$

$$(\sigma^*\, X\Phi - Q) + \textstyle\sum_m (1 + B^2 L^2{}_m)\,\Phi + \sum_v \Phi =$$

$$= \left(\sigma_x^a - \nu\cdot\varepsilon\cdot P_s\,(1-p)\,\sigma_x^{sp}\right) X\Phi - Q + \textstyle\sum_m (1 + B^2 L^2{}_m)\,\Phi + \sum_v \Phi.$$

Teilt man beide Seiten durch $\Sigma_{sp}\,\Phi$ und setzt: $\dfrac{\sum_x^{sp}}{\sum_x^a} = \dfrac{1}{1+\alpha}$,

dann erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{Q}{\sum_{sp}\Phi} = -\left\{\nu\,\varepsilon\, P_s - 2\,(1+\alpha) - \frac{\sum_m}{\sum_{sp}}(1 + B^2 L^2{}_m) - \frac{\sum_v}{\sum_{sp}}\right\}. \qquad \text{(IV, 18)}$$

Setzen wir wieder: $\Sigma_{sp} = \Sigma_x^a \cdot \dfrac{1}{1+\alpha}$, dann ergibt sich:

$$\frac{Q}{\sum_x^a \Phi} = -\frac{1}{1+\alpha}\left\{\nu\,\varepsilon\, P_s - 2\,(1+\alpha) - \frac{\sum_m}{\sum_{sp}}\,(1 + B^2 L^2{}_m)\,\frac{\sum_v}{\sum_{sp}}\right\}. \qquad \text{(IV, 19)}$$

Dies ist der Bruchteil an Spaltstoff, der dauernd ergänzt werden muß.

Wir berechnen den laufenden Spaltstoffnachschub für das Beispiel eines Thorium-Uran-Kreislaufs.

In einem Graphitreaktor von 3 m Durchmesser, einer Höhe von 3 m und einer Reflektorersparnis von 0,5 m seien:

$\alpha = 0{,}09$; mittl. Dichte des Graphits $= 1\, g\,/\,\mathrm{cm}^3$;
$L_m = 0{,}8$ m; $\tau = 890\ \mathrm{cm}^2$;
$\varepsilon = 1{,}02$; $\nu = 2{,}5$;
$\dfrac{\sum_v}{\sum_{sp}} = 0{,}10$; auf 1000 kg Graphit komme 4 kg U^{233}.

Es ergeben sich folgende Werte:

$$P_s = 0{,}83; \quad \frac{\sum m}{\sum sp} = 0{,}038 \ ; \ B^2 L_m{}^2 = 1{,}3.$$

Der Bruchteil des laufend zu ergänzenden Spaltstoffs ergibt sich für dieses Beispiel zu:

$$\frac{Q}{\sum_x^a \Phi} = -\ 0{,}187.$$

Rechnet man für größere Reaktortypen von 200 bis 500 Mw Leistung den zu ergänzenden Spaltstoffbruchteil beim Uran-Thorium-Kreislauf aus, so erhält man Werte zwischen 0,05 und 0,25.

Der tatsächliche Bedarf ist etwas größer (meist um 0,05), da für die obigen Abschätzungen einiges vernachlässigt wurde, um die Berechnungen zu vereinfachen.

Beim Plutonium-Uran-Kreislauf sind die Verhältnisse wesentlich ungünstiger.

Eine genauere, wenn auch nicht so anschauliche Darstellung soll im folgenden vorgeführt werden. Es wird wieder von Gl. (IV, 10) ausgegangen und ein Quellglied Q für den Spaltstoffnachschub angenommen:

$$\frac{dX}{dt} = \sum_y \Phi - \sigma^* X \Phi + Q \qquad \text{(IV. 20)}$$

und nach (IV, 3):

$$\left\{ \nu \, \varepsilon \, P_s \, p - (1 + \alpha) \right\} \sigma_{sp} X = \sum_y + \sum_m (1 + B^2 L_m{}^2) + \sum_v. \qquad \text{(IV, 21)}$$

Wir führen zwei Abkürzungen ein:

$$R = (\nu \, \varepsilon \, P_s \, p - [1 + \alpha]) \, \sigma_{sp} \ \text{und} \ \Sigma = \Sigma_y + \Sigma_m (1 + B^2 L_m{}^2) + \sum_v. \qquad \text{(IV, 22)}$$

Damit wird aus Gl. (IV, 21):

$$RX = \sum \ \text{und} \ X = \frac{\sum}{R} \ \text{sowie:} \ \frac{dX}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d\Sigma}{dt}. \qquad \text{(IV, 23)}$$

Dies in Gl. (IV, 21) eingesetzt, ergibt für Q:

$$Q = \frac{1}{R} \frac{d\Sigma}{dt} + \sigma^* \Phi \frac{\Sigma}{R} - \Sigma_y \Phi. \tag{IV, 24}$$

Durch Division mit

$$\sigma_x^a X \Phi = \sigma_x^a \frac{\Sigma}{R} \Phi$$

erhalten wir den Bruchteil des Ergänzungsbedarfs:

$$\frac{Q}{\sigma_x^a \Phi X} = \frac{1}{\sigma_x^a \Phi \Sigma} \frac{d\Sigma}{dt} + \frac{\sigma^*}{\sigma_x^a} - \frac{R}{\sigma_x^a} \frac{\Sigma_y}{\Sigma} = \frac{1}{\sigma_x^a \Phi \Sigma} \frac{d\Sigma}{dt} +$$

$$+ \left\{ 1 - \eta P_s \varepsilon (1-p) - (\eta P_s p \varepsilon - 1) \frac{\Sigma_y}{\Sigma} \right\}. \tag{IV, 25}$$

Der erste Summand stellt den Betrag an nachgeliefertem Spaltstoff dar, der erforderlich ist, um die steigenden Vergiftungsverluste auszugleichen.

Wir wollen nun die *Konversionsprozesse* betrachten.

Auch hier soll die für die Praxis ausreichend genaue Annahme gemacht werden, daß die Brutstoffkonzentration konstant ist. Der Primärspaltstoff von der Konzentration X_1 wird durch Neutroneneinfang abgebaut. Seine Konzentrationsänderung läßt sich einfach darstellen:

$$\frac{dX_1}{dt} = - \sigma_1^a X_1 \Phi. \tag{IV, 26}$$

Der sekundär erzeugte Spaltstoff entsteht durch Einfang von schnellen und thermischen Neutronen im Brutstoff. Er wird nach seiner Erzeugung an der Kettenreaktion teilnehmen, d. h., ein Teil des neuen Spaltstoffs wird durch Neutroneneingang wieder vernichtet.

Die Konzentrationsbilanz für den Sekundärspaltstoff sieht also folgendermaßen aus:

$$\frac{dX_2}{dt} = \Sigma_y \Phi + (\nu_1 \sigma_1{}^{sp} X_1 + \nu_2 \sigma_2{}^{sp} X_2) \varepsilon (1-p) P_s \Phi - \sigma^a{}_2 X_2 \Phi. \tag{IV, 27}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der entsprechenden für den Brutprozeß (IV, 6), so erkennt man, daß nur das Glied für den Einfang von schnellen Neutronen im Brutstoff einen neuen Summanden erhalten hat, der die Erzeugungsrate von Sekundärspaltstoff aus Primärspaltstoff berücksichtigt.

Die Lösung der Gl. (IV, 27) heißt:

$$X_1 = X_{10} \cdot e^{-\sigma^{a_1} \Phi t}. \qquad \text{(IV, 28)}$$

Um Gl. (IV, 27) zu vereinfachen, setzen wir folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned} -\nu_2 \sigma_2^{sp} \varepsilon (1-p) P_s + \sigma_2^a &= \overset{*}{\sigma}_2, \\ \nu_1 \sigma_1^{sp} \varepsilon (1-p) P_s &= \overset{*}{\sigma}_1. \end{aligned} \qquad \text{(IV, 29)}$$

Dann wird aus Gl. (IV, 27) und (IV, 28):

$$\frac{dX}{dt} = \sum y \Phi + \overset{*}{\sigma}_1 X_{10} \Phi e^{-\sigma_1^a \Phi t} - \overset{*}{\sigma}_2 X_2 \Phi. \qquad \text{(IV, 30)}$$

Mit der Anfangsbedingung $X_2(0) = 0$ lautet die Lösung der Gl. (IV, 30):

$$X_2 = \frac{\sum y}{\overset{*}{\sigma}_2} \left\{ 1 - e^{-\sigma_2^* \Phi t} \right\} + \frac{\sigma_1^* X_{10}}{\sigma_1^a - \overset{*}{\sigma}_1} \left\{ e^{-\overset{*}{\sigma}_2 \Phi t} - e^{-\sigma_1^a \Phi t} \right\},$$

wie sich durch Einsetzen in Gl. (IV, 30) zeigen läßt. (IV, 31)

Das nachstehende Diagramm gibt den Verlauf der Kurven für die Funktionen $X_1(t)$ und $X_2(t)$ wieder.

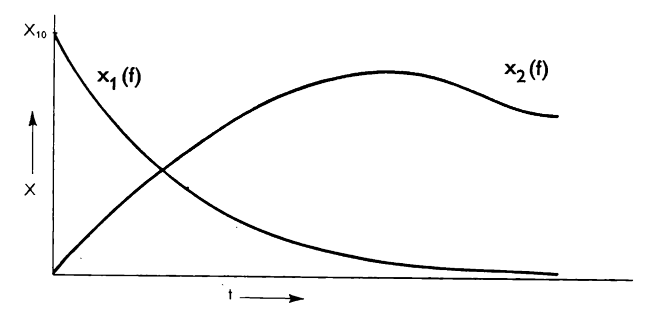


Abb. 4

Aus dieser Darstellung lesen wir ab, daß die Werte für X_1 exponentiell abfallen, während sie für X_2 zunächst ansteigen und nach einem Maximum sich dem Wert

$$X_2(\infty) = \frac{\Sigma_y}{\overset{*}{\sigma}_2} \qquad \text{(IV, 32)}$$

asymptotisch nähern. Es fragt sich, ob ein Reaktor für diesen Wert (s. Gl. (164)) kritisch werden kann. Bei einem solchen Konversionsprozeß würde ein Reaktor aus dem Konversionsbereich in den Brutbereich gefahren werden und könnte als Brutreaktor ohne fernere Spaltstoffzufuhr weiterbetrieben werden.

Wir wollen untersuchen, ob diese Operation möglich ist, indem wir Gl. (IV, 32) in die Bedingung für das Kritischwerden eines Reaktors Gl. (IV, 4) einsetzen. Wir erhalten dann wieder einen Ausdruck wie in Gl. (IV, 14). Dieses Ergebnis könnten wir bereits so deuten, daß die dort geforderte Bedingung praktisch nicht erfüllbar ist. Ein thermischer Reaktor läßt sich also nicht durch eine einfache Konversion in den Brutbereich fahren, nicht einmal für den günstigen Konversionsprozeß $U^{235} \longrightarrow Th^{232} \longrightarrow U^{233}$.

Sowohl für den Konversionsprozeß als auch für den nachfolgenden Brutprozeß bedarf es des beständigen Nachschubs an frischem Spaltstoff. Man könnte dieses Problem dadurch lösen, daß man mit einer sehr hohen Konzentration an primärem Spaltstoff den Betrieb beginnt und den Neutronenüberschuß zunächst mit Regelstäben kompensiert. Dieses Verfahren hat den Nachteil, daß dabei viele Neutronen überflüssig produziert werden, die in den Absorptionsstäben vernichtet werden müssen. Es ist daher ökonomischer, für dauernden Spaltstoffnachschub zu sorgen, wenn sich das technisch durchführen läßt.

Ähnlich wie für den Fall der reinen Brutreaktion kann auch für den Übergang vom Konversions- zum Brutprozeß eine Quellfunktion für den Spaltstoffnachschub bestimmt werden. Wir führen das Quellglied Q in Gl. (IV, 26) ein. Zusammen mit Gl. (IV, 30) und der entsprechenden Gleichung für die kritische Bedingung erhalten wir ein vollständiges Gleichungssystem. Seine Lösung ist so umfangreich, daß sie hier nicht aufgeführt werden soll. Es sei nur erklärt, daß aus dieser Lösung sich qualitativ folgendes ergibt:

Für den U^{235}-Th^{232}-U^{233}-Prozeß ist der Quelltherm größer als für den Brutprozeß U^{233}-Th^{232}-U^{233}. Wenn der Primärspaltstoff U^{235} einmal

vollständig umgesetzt ist, treten ähnliche Verhältnisse auf, wie sie für den Brutprozeß in Gl. (IV, 19) beschrieben sind, da U^{233} aufgrund seines höheren η-Wertes $\left(\eta = \frac{\nu}{1+\alpha}\right)$ eine größere Neutronenergiebigkeit hat.

Wenn auch die genaue Darstellung im Rahmen dieses Buches zu kompliziert ist, wollen wir doch den Nachschubbedarf für folgenden einfachen Fall berechnen:

1. Die Vergiftungsverluste sind kompensiert (z. B. durch Entfernen von Absorberstäben).
2. Es ist bereits ein stationärer Zustand für alle Prozesse erreicht.

Wir knüpfen an die Gleichungen (IV, 26) und (IV, 27) an und ergänzen Gl. (IV, 26) durch das Quellglied Q:

$$\frac{dX_1}{dt} = -\sigma_1^a \Phi X_1 + Q \tag{IV, 33}$$

und

$$\frac{dX_2}{dt} = \sum_y \Phi + \overset{*}{\sigma_1} X_1 \Phi - \overset{*}{\sigma_2} X_2 \Phi. \tag{IV, 34}$$

Die Bedeutung von σ_1^* und σ_2^* ist durch Gl. (IV, 29) gegeben. Wir nehmen noch die kritische Bedingung hinzu:

$$R_1 X_1 + R_2 X_2 = \Sigma; \tag{IV, 35}$$

Σ ist gegeben durch Gl. (IV, 22). Die Größen R_1 und R_2 bedeuten:

$$R_1 = \left\{\nu_1 \varepsilon P_s p - (1 + \alpha_1)\right\} \sigma_1^{sp}.$$

$$R_2 = \left\{\nu_2 \varepsilon P_s p - (1 + \alpha_2)\right\} \sigma_1^{sp}. \tag{IV, 36}$$

Für den Gleichgewichtszustand und bei kompensierter Vergiftung sind Σ_v und Σ als konstant zu betrachten. Außerdem ist:

$$\frac{dX_1}{dt} = -\sigma_1^a \Phi X_1 + Q = 0 \tag{IV, 37}$$

und

$$\frac{dX_1}{dt} = \sum_y \Phi + \overset{*}{\sigma_1} \Phi X_1 - \overset{*}{\sigma_2} \Phi X_2 = O. \tag{IV, 38}$$

Aus den Gleichungen (IV, 35) und (IV, 37) können zunächst die Spaltstoffkonzentrationen X_1 und X_2 bestimmt werden:

$$X_1 = \frac{\overset{*}{\sigma}_2 \Sigma - R_2 \Sigma_y}{R_1 \overset{*}{\sigma}_2 + R_2 \overset{*}{\sigma}_1},$$

$$X_2 = \frac{\overset{*}{\sigma}_1 \Sigma + R_1 \Sigma_y}{R_1 \overset{*}{\sigma}_1 + R_2 \overset{*}{\sigma}_1}. \qquad \text{(IV, 39)}$$

Der Bruchteil des verbrauchten Spaltstoffs, der zu ergänzen ist, ergibt sich aus dem Verhältnis der zugesetzten Spaltstoffmenge Q zu dem verbrauchten Spaltstoff $\sigma_1^a \Phi X_1 + \sigma_2^a \Phi X_2$:

$$\frac{Q}{\sigma_1^a \Phi X_1 + \sigma_2^a \Phi X_2} = \frac{\sigma_1^a X_1}{\sigma_1^a X_1 + \sigma_2^a X_2} = \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma_2^a}{\sigma_1^a} \dfrac{\overset{*}{\sigma}_1 \Sigma + R_1 \Sigma_y}{\overset{*}{\sigma}_2 \Sigma - R_2 \Sigma_y}}. \qquad \text{(IV, 40)}$$

Wir formen den Bruch im Nenner mit Hilfe der Gln. (IV, 29) und (IV, 36) um. Ferner berücksichtigen wir, daß $\eta = \frac{\nu}{1+\alpha}$ ist. Wir erhalten:

$$\frac{Q}{\sigma_1^a \Phi X_1 + \sigma_2^a \Phi X_2} =$$

$$= \frac{1 - \eta_2 P_s \varepsilon (1-p) - (\eta_2 \varepsilon P_s p - 1) \Sigma_y / \Sigma}{1 + (\eta_1 - \eta_2) \varepsilon P_s (1 - p) + (\eta_1 - \eta_2) \varepsilon P_s p \, \Sigma_y / \Sigma}. \qquad \text{(IV, 41)}$$

Zum Schluß sei wieder ein Zahlenbeispiel gebracht. Bei einem typischen Konversionsreaktor sind:

$p = 0{,}90;$	$\varepsilon = 1{,}03;$	$P_s = 0{,}93;$
$\frac{\Sigma_y}{\Sigma} = 0{,}67;$	$\eta_1 = 2{,}08;$	$\eta_2 = 2{,}30.$

Dann ist unter den oben angenommenen Voraussetzungen der Bruchteil des zuzuführenden Spaltstoffes:

$$\frac{Q}{\sigma_1^a \Phi X_1 + \sigma_2^a \Phi X_2} = 0{,}135.$$

3. *Konversionsvorgänge bei natürlichem und bei angereichertem Uran*

In der heutigen Atomtechnik wird U^{235} am häufigsten als Spaltstoff verwendet. Die Konversionsprozesse verlaufen dabei meist nach dem Prinzip des Dreistoffsystems $U^{235} \longrightarrow U^{238} \longrightarrow Pu^{239}$.

Liegt U^{235} in *natürlichem Uran* vor, dann moderiert man die Reaktoren entweder mit Graphit oder mit schwerem Wasser. In beiden Reaktortypen ist eine heterogene Anordnung des Spaltstoffs unvermeidlich, damit eine ausreichend große Multiplikationskonstante k_{eff} erreicht werden kann.

Graphitmoderierte Reaktoren mit natürlichem Uran als Spaltstoff (im allgemeinen als „Calder-Hall-Reaktoren" bezeichnet) werden in sehr großen Einheiten gebaut. Sie haben einen kubischen oder zylinderförmigen Reaktorkern von 8–12 m Durchmesser. Durch diese Dimensionen wird der Ausfluß an thermischen und schnellen Neutronen kleingehalten.

Ebenso sind die Verluste durch die Spaltproduktvergiftung klein, weil die Leistungsdichte — und infolgedessen auch der Neutronenfluß — klein ist ($\Phi = 10^{12}/\text{cm}^2$ sec); so wird der Spaltstoff verhältnismäßig wenig ausgenutzt. Der Konversionsfaktor (s. Gl. (IV, 5)) ist daher für diesen Reaktortyp groß.

Für einen Graphitreaktor, der mit 2000 t Graphit und 1000 t natürlichem Uran beschickt ist, ergibt sich bei einer mittleren Vergiftung von $\frac{\sum_v}{\sum_{sp}(1+\alpha)} = 0{,}05$ nach Gl. (IV, 5) ein Konversionsfaktor, der größer als 0,9 ist; dabei ist P_s, der Wirklichkeit entsprechend, gleich eins gesetzt.

Bei Schwerwasserreaktoren sind die Verhältnisse fast genau so günstig. Der Neutronenverlust durch Ausfluß aus dem Reaktor ist zwar wegen der kleineren Abmessungen dieser Anlagen größer, doch wird dieser Verlust durch den kleinen Absorptionsquerschnitt des schweren Wassers gegen Neutronen ausgeglichen.

Die Vergiftung $\frac{\sum_v}{\sum_{sp}(1+\alpha)}$ ist allerdings bei D_2O-Reaktoren größer als bei Graphitreaktoren, weil ihre Leistungsdichte höher ist. Für große Leistungsreaktoren ergeben sich auch hier Konversionsfaktoren, die um 0,9 liegen.

Wenn *angereichertes Uran* als Spaltstoff eingebracht wird, ist der Neutronenausfluß wegen des kleinen Reaktorkerns verhältnismäßig

hoch. Die sehr hohe Leistungsdichte hat eine starke Vergiftung zur Folge. Bei solchen Reaktoren sind die Konversionsbedingungen also nicht günstig.

Zum besseren Verständnis des Konversionsprozesses schließen wir noch einige qualitative Betrachtungen an.

Zunächst interessiert uns die Asymptote der Kurve für die Konzentration X_2 (s. Figur 3), bezogen auf den Anfangswert des Primärspaltstoffs X_{10}. Sie ist ein Maß für die Ergiebigkeit des Konversionsprozesses.

$$\frac{X_2(\infty)}{X_{10}} = \frac{Y \sigma_y}{X_{10}\, \sigma_2^*} = \frac{Y}{X_{10}}\, \frac{\sigma_y}{\sigma_a^2}\, \frac{1}{(1 - \eta_2\, \varepsilon\, P_s\, (1 - p))}. \qquad \text{(IV, 42)}$$

Der erste Faktor $\frac{X}{X_{10}}$ stellt die Anreicherung des Spaltstoffs dar; der zweite, $\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_2^a}\right)$, ist eine Konstante; der dritte hängt von der Resonanzentkommwahrscheinlichkeit p ab. Nach dieser Formel bedeutet eine höhere Spaltstoffanreicherung von vornherein einen ungünstigeren Wert für $\frac{X_2(\infty)}{X_{10}}$. Man kann bei hoher Anreicherung zwar die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit p etwas kleiner halten, doch muß die Bedingung für das Kritischwerden des Reaktors erfüllt bleiben, so daß der Variationsbereich für p sehr beschränkt ist.

Eine hohe Anreicherung mit Uran^{235} hat also stets einen schlechten Konversionsfaktor zur Folge.

In der untenstehenden Übersicht sind die Werte von $\frac{X_2(\infty)}{X_{10}}$ für einige Anreicherungsgrade bei verschiedenen p zusammengestellt.

p	$\frac{X_2(\infty)}{X_{10}}$		
	Anreicherung: 0,715%	1%	2%
0,95	0,41	0,29	0,145
0,9	0,46	0,33	0,165
0,85	0,52	0,37	0,185

Diese Ergebnisse zeigen, daß z. B. beim Calder-Hall-Typ ($p \approx 0{,}90$; Anreicherung: 0,715%) auf ein kg eingebrachtes natürliches Uran höchstens 3,3 g Plutonium gewonnen werden können.

Wird der U^{235}-Gehalt auf 2% gesteigert (d. h. 20 g spaltbares Uran auf 1 kg natürliches Uran), dann gewinnt man höchstens 3,7 g Plutonium auf die 20 g spaltbares Material; dies ist auch nur dann möglich, wenn $p = 0{,}85$ gemacht werden kann.

Als nächstes soll die Lage des Maximums der untersuchten X_2-Kurve, bezogen auf die Anfangskonzentration des Primärspaltstoffs X_{10}, bestimmt werden.

Aus Gl. (IV, 31) gewinnen wir:

$$\frac{X_2}{X_{10}} = \frac{Y}{X_{10}} \frac{\sigma_y}{\overset{*}{\sigma}_2} \left\{1 - e^{-\overset{*}{\sigma}_2 \Phi t}\right\} + \frac{\overset{*}{\sigma}_1}{\sigma_1^a - \overset{*}{\sigma}_2} \left\{e^{-\overset{*}{\sigma}_1 \Phi t} - e^{-\sigma_1^a \Phi t}\right\}. \tag{IV, 43}$$

Wir differenzieren diese Funktion nach (Φt) und setzen $\left(\frac{X_2}{X_{10}}\right) = 0$;

daraus gewinnt man die „Dosis“ (Φt) max, für die die Funktion $\left(\frac{X_2}{X_{10}}\right)$ ein Maximum hat.

$$(\Phi t)_{max} = \frac{1}{\overset{*}{\sigma}_2 - \sigma_1^a} \ln \left\{\frac{\sum y_0 (\overset{*}{\sigma}_2 - \sigma_1^a)}{\sum x_{10} \overset{*}{\sigma}_1} + \frac{\overset{*}{\sigma}_2}{\sigma_1^a}\right\}. \tag{IV, 44}$$

In der folgenden Zusammenstellung sind die (ΦT) max-Werte ($p = 0{,}9$, $P_s = 0{,}93$ und $\varepsilon = 1{,}03$) für natürliches Uran und angereicherten Brennstoff aufgeführt.

Anreicherung =	0,715%	1%	2%
$(\Phi t)_{max}$ =	$3{,}7 \cdot 10^{21}$	$3{,}0 \cdot 10^{21}$	$2{,}0 \cdot 10^{21}/\mathrm{cm}^2$

Das Maximum von $\frac{X_2}{X_{10}}$ wird also um so eher erreicht, je höher die Konzentration des Ausgangsspaltstoffes ist. Ein Vergleich mit dem heute tatsächlich erreichbaren Abbrand (z. B. bei natürlichem Uran) zeigt, daß diese Größen für die Maximalwerte nicht erreicht werden.

Für natürliches Uran wird ein Abbrand von 3000–6000 Mwd/t erzielt; das entspricht einer Dosis $(\Phi\, t)$ max von $0{,}8–1{,}6 \cdot 10^{21}/\text{cm}^2$. Also selbst bei einer Spaltstoffausnutzung von 6000 Mwd/t wird noch nicht die Hälfte der Dosis erreicht, die notwendig ist, um das Konzentrationsmaximum für den Sekundärspaltstoff zu erreichen.

Setzen wir die in der Übersicht angegebenen Werte für die Dosis in die Gleichung für die Konzentration des gebrüteten Spaltstoffs — Gl. (IV,43) — ein, so gewinnen wir ein anschauliches Bild von den ereichbaren Maxima der relativen Konzentration des Sekundärspaltstoffs.

In der nun folgenden Tabelle sind diese Maxima für verschiedene Spaltstoffkonzentrationen mit den asymptotischen relativen Konzentrationswerten verglichen.

$(p = 0{,}9;\ P_s = 0{,}93;\ \varepsilon = 1{,}03.)$

Anreicherung	0,715 %	1 %	2 %
$\left(\frac{X_2}{X_{10}}\right)_{\max} =$	0,47	0,34	0,19
$\frac{X_{2\,(\infty)}}{X_{10}} =$	0,46	0,33	0,165

Diese Zusammenstellung zeigt, daß das Konzentrationsmaximum des Sekundärspaltstoffs nur sehr wenig über dem asymptotischen Wert für diese Konzentration liegt, wenn große Werte für $(\Phi\, t)$ erreicht werden.

Im unteren Bereich der Dosisleistung macht sich ein Effekt bemerkbar, der besonders dann eine große Bedeutung haben kann, wenn natürliches Uran in den Reaktor eingebracht wird. Da das Plutonium, verglichen mit dem U^{235}, einen großen Absorptionsquerschnitt hat, kann die Neutronenbilanz eines Konversionsreaktors nach einer gewissen Betriebsdauer besonders bei kleiner Resonanzentkommwahrscheinlichkeit günstiger sein als im Anfangszustand.

Um diese Frage zu untersuchen, betrachten wir wieder Gl. (IV, 35), die Gleichung für die Kritikalitätsbedingung. Wir setzen die in Gl. (IV, 36) definierten Abkürzungen R_1 und R_2 in diese Gleichung ein und erhalten:

$$(\eta_1\, P_s\, \varepsilon\, p - 1)\, \sigma_1^a X_1 + (\eta_2\, P_s\, p - 1)\, \sigma_2^a X_2 = \textstyle\sum_y + \sum_m (1 + B_2 L_m^2) + \sum_v. \qquad \text{(IV, 45)}$$

Bei Betriebsbeginn ($t = 0$) heißt die Gleichung:

$$(\eta_1 P_s p - 1)\, \sigma_1^a X_{10} = \sum_y + \sum_m (1 + B_2 L_2) + \sum_v^o. \qquad \text{(IV,46)}$$

Der relative Anstieg oder Abfall der Reaktivität kann durch den Quotienten aus den linken Seiten dieser beiden Gleichungen gefunden werden. Wir dürfen voraussetzen, daß die rechten Seiten der beiden Gleichungen sehr wenig voneinander verschieden sind, da bei kleinen (Φt) die Vergiftung praktisch nur aus einer stationären Vergiftung besteht.

Die Änderung der relativen Reaktivität, die durch die Absorberstäbe ausgeglichen werden muß, definieren wir als:

$$D = \frac{(\eta_1 P_s \varepsilon p - 1)\, \sigma_1^a X_1 + (\eta_2 P_s \varepsilon p - 1)\, \sigma_2^a X_2}{(\eta_1 P_s \varepsilon p - 1)\, X_{10}\, \sigma^a{}_1}.$$

$$= \frac{X_1}{X_{10}} + \frac{R_2 X_2}{R_1 X_{10}} \qquad \text{(IV,47)}$$

mit den Abkürzungen:

$$R_1 = (\eta_1 P_s \varepsilon - 1)\, \sigma_1^a \quad \text{und} \quad R_2 = (\eta_2 P_s \varepsilon p - 1)\, \sigma_2^a. \qquad \text{(IV,48)}$$

Die in Gl. (IV, 47) aufgeschriebene Funktion ist durch die folgende Figur wiedergegeben.

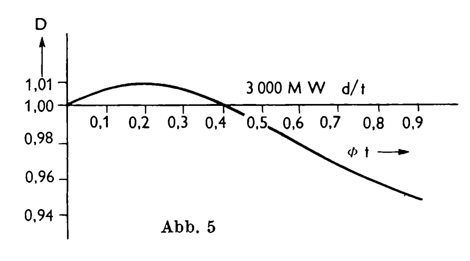


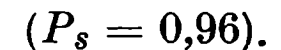
Abb. 5

Wir sehen, daß die Reaktivität in Abhängigkeit von der Dosis ein Maximum hat, nach dem sie stark abfällt. Diesen Effekt kann man insbesondere bei Calder-Hall-Reaktoren ausnutzen, indem man die Spaltstoffelemente verschiedenen Abbrandzustandes in geeigneter Weise anordnet, so daß eine höhere Gesamtreaktivität erreicht wird, als zu Beginn des Reaktorbetriebes mit frischen Brennelementen erzielt wurde.

Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen ein solcher Reaktivitätsanstieg erfolgen kann, und wie groß die Steigung dieser Kurve ist. Daher differenzieren wir die Gl. (IV, 47) nach (Φt). Der Anstieg der Kurve im Punkte (Φt) $= 0$ ist:

$$\frac{dD}{d\,(\Phi t)_0} = \sigma_1^a \left\{ \frac{R_2}{R_1} \left[\frac{Y \sigma_y}{X_{10}\, \sigma_1^a} + \eta_1 \varepsilon P_s (1-p) \right] - 1 \right\}. \qquad \text{(IV, 49)}$$

Die folgenden graphischen Darstellungen zeigen die Kurve für $\frac{dD}{d\,(\Phi t)_0}$ in Abhängigkeit von der Resonanzentkommwahrscheinlichkeit p bei verschiedenen Anreicherungsgraden des Spaltstoffs aufgetragen in Einheiten von σ_1^a



$(P_s = 0{,}96)$.

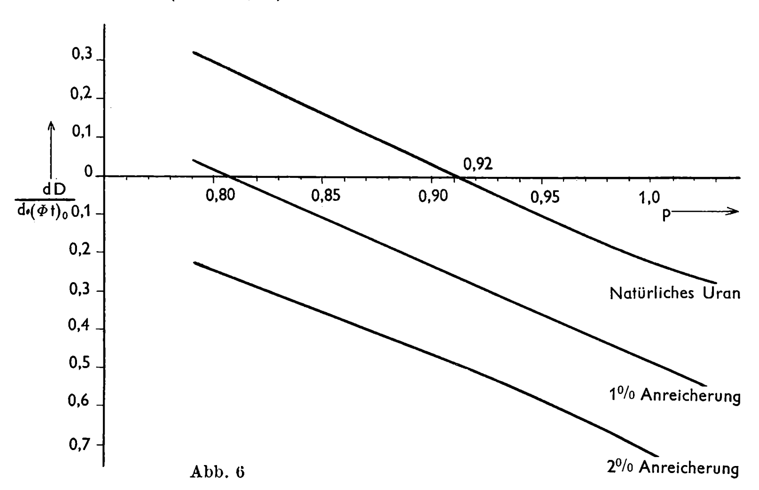


Abb. 6

Wir sehen, daß die Reaktivität bei Reaktoren mit natürlichem Uran bis zu $p = 0{,}92$ noch ansteigt. (Die dem Diagramm zugrunde gelegte Annahme $P_s = 0{,}96$ dürfte für Calder-Hall-Typen eher zu pessimistisch als zu optimistisch sein.)

Ferner erkennt man, daß ein Konversionsprozeß, für den die Reaktivität wenigstens noch zu Beginn ansteigen dürfte, bei einer Anreicherung von höchstens 1 % noch stattfinden kann; bei höheren Anreicherungen werden die Werte für den Anstieg der Kurve in Figur 5 (s. Figur 6) negativ, d. h., die Reaktivität nimmt ab.

Reaktoren mit natürlichem Uran haben einen sehr knappen Neutronenhaushalt; dies legt der Konstruktion solcher Anlagen einige besondere Bedingungen auf.

Diese Reaktoren müssen entweder sehr groß gebaut werden, oder man darf nur solche Baustoffe verwenden, die sehr kleine Neutronenabsorptionsquerschnitte haben. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, hat

man das sogenannte „Plutoniumspeicherprinzip" entwickelt, bei dem das in Reaktoren gewonnene Plutonium dem natürlichen Uran der Brennelemente zugesetzt wird; dadurch erreicht man eine höhere effektive Spaltstoffanreicherung. Nach einem gewissen Abbrand wird das Plutonium aus den verbrauchten Brennelementen zurückgewonnen und von neuem eingesetzt. Das Plutonium wird auf diese Weise wohl umgesetzt, aber nicht verbraucht, da sich durch Konversion in den Brennelementen immer wieder neues Plutonium aus U^{238} bildet. Mit diesem Kunstgriff erreicht man, daß einerseits natürliches Uran mit allen seinen Vorteilen als Spaltstoff verwendet wird, während andererseits die effektive Spaltstoffanreicherung einfachere Konstruktionslösungen für die Reaktoranlage erlaubt.

Der oben beschriebene Vorgang in Reaktoren mit Plutoniumspeicher soll genauer dargestellt werden.

Die Brutstoffkonzentration ist praktisch konstant ($Y = \text{const}$). Ebenso wird die Konzentration des Sekundärspaltstoffs X_2 dauernd konstant gehalten, indem der chemisch abgetrennte Sekundärspaltstoff dem Reaktor ständig wieder zugeführt wird.

Die Konzentration des Primärspaltstoffs X_1 wird auch auf einem bestimmten Stand gehalten, indem das erschöpfte natürliche Uran laufend durch frisches ersetzt wird.

Die Vergiftung wird durch das häufige chemische Aufbereiten des Brennstoffs kleingehalten. Sie übersteigt die stationäre Vergiftung, die durch die Spaltprodukte mit großen Absorptionsquerschnitten bedingt ist, nur wenig.

Die zugeführte Menge an Primärspaltstoff pro cm^3 und sec sei m; sie wird in Form von natürlichem Uran in den Reaktor eingebracht. Wenn der Spaltstoff eine durchschnittliche Dosis $\Phi\,\tau$ erhält, dann ist $m \cdot e^{-\sigma_1^a \Phi \tau}$ diejenige Menge pro cm^3 und sec, die dem Reaktor wieder entnommen wird. Im Ganzen wird dem Reaktor also an Primärspaltstoff pro cm^3 und sec

$$Q = m\,(1 - e^{-\sigma^{a_1} \Phi t\, \tau}) \tag{IV, 50}$$

zugeführt.

Wir nehmen die Gln. (IV, 33) und (IV, 34) zu Hilfe und erhalten:

$$\sigma_1^a \Phi X_1 = m \left\{ (1 - e^{-\sigma^{a_1} \Phi \tau}) \right\} = Q \tag{IV, 51}$$

und

$$-\,\overset{*}{\sigma}_1 X_1 \Phi + \overset{*}{\sigma}_1 \Phi_2 X_2 = \textstyle\sum_y \Phi. \tag{IV, 52}$$

Hieraus ergibt sich:

$$X_1 = Q \frac{1}{\sigma_1^a \Phi} \tag{IV, 53}$$

und

$$X_2 = \frac{1}{\sigma_2^* \Phi} \left\{ \sum y \, \Phi + \frac{\sigma_1^*}{\sigma_1^a} Q \right\}. \tag{IV, 54}$$

Es ist noch die Menge m näher zu bestimmen. Wenn nach der Zeit τ die Spaltstoffelemete ausgewechselt werden, dann muß pro cm^3 und sec eine gewisse Menge von Spaltstoff wieder zugeführt werden, die die ursprüngliche Primärspaltstoffkonzentration X_{10} wiederherstellt.

Betrachten wir den Brennstoffwechsel als über den ganzen Reaktor verteilt; dann ist also:

$$m = \frac{X_{10}}{\tau} \quad \text{und} \quad Q = \frac{X_{10}}{\tau} \left(1 - e^{-\sigma^a{}_1 \Phi \tau}\right) \tag{IV, 55}$$

die pro cm^3 und sec zugeführte Primärspaltstoffmenge. Nach dem Vorbild von Gl. (IV, 47) errechnen wir die relative Änderung der Reaktivität:

$$\begin{aligned} D &= \frac{X_1}{X_{10}} + \frac{R_2}{R_1} \frac{X_2}{X_{10}} = \\ &= \frac{Q}{X_{10}\, \sigma_1^a \Phi} \left\{ 1 + \frac{R_2\, \sigma_1^*}{R_1\, \sigma_2^*} \right\} + \frac{R_2}{R_1} \frac{Y}{X_{10}} \frac{\sigma y}{\sigma^*{}_2} = \\ &= \frac{1}{\sigma_1^* \, \Phi \tau} \left\{ 1 - e^{-\sigma^a{}_1 \Phi \tau} \right\} \left\{ 1 + \frac{R_2\, \sigma_1^*}{R_1\, \sigma_2^*} \right\} + \frac{\sum y}{\sum_x^a} \frac{\sigma^a{}_1}{\sigma_2^*} \frac{R_2}{R_1}. \end{aligned} \tag{IV, 56}$$

Der zweite Summand in der ersten Zeile stellt den Anteil der relativen Reaktivitätsänderung durch den Einfluß des Sekundärspaltstoffs dar. Der erste Summand beschreibt den Anteil des Primärspaltstoffs an der Reaktivitätsänderung, der von dem Erschöpfungsgrad der ausgewechselten Brennelemente abhängt. Wir überzeugen uns leicht, daß für den Fall einer extrem kleinen Ausnutzung des Primärspaltstoffs ($\tau = 0$) dieser Anteil gleich eins ist. Für $\tau \rightarrow \infty$ wird dieser Summand kleiner und verschwindet schließlich völlig. Die Ausnutzungszeit τ muß also einen Kompromiß zwischen der geforderten Reaktivitätshöhe und einer möglichst

sparsamen chemischen Spaltstoffaufbereitung bilden. Je größer τ ist, desto kleiner sind die Kosten für die Brennstoffaufbereitung, desto kleiner ist aber auch der Reaktivitätsgewinn.

Wir fragen nun nach dem Konversionsfaktor und setzen in Gl. (IV, 2) die gefundenen Ausdrücke aus Gln. (IV, 53) bis (IV, 55) ein. Mit den Abkürzungen aus Gl. (IV, 29) erhalten wir das Resultat:

$$C = \frac{\dfrac{\sum y}{\sum^a_{X_{10}}} + \dfrac{1}{\Phi\,\sigma^a_1\,\tau}\left\{1 - e^{-\Phi\,\sigma^a{}_1\,\tau}\right\}\left\{\eta_1\,P_s\,\varepsilon\,(1-p)\right\}}{\dfrac{\sum y}{\sum^a_{X_{10}}} + \dfrac{1}{\Phi\,\sigma^a_1\,\tau}\left\{1 - e^{-\Phi\,\sigma^a{}_1\,\tau}\right\}\left\{1 + (\eta_1 - \eta_2)\,\varepsilon\,P_s\,(1-p)\right\}}. \tag{IV, 57}$$

Für $\tau \to \infty$ ergibt sich der günstigste Konversionsfaktor ($C = 1$), der allerdings nicht realisierbar ist, weil die Reaktivität für diesen Fall zu stark abnimmt. Den ungünstigsten Konversionsfaktor ($C \approx 0{,}5$) erhält man für $\tau \to 0$. Man wird also einen Konversionsfaktor zwischen diesen beiden Extremen durch geeignete Festlegung von τ wählen.

Für die Praxis ist die Frage nach der effektiven Ausnutzung des U^{235} besonders wichtig. Diese ist gegeben durch das Verhältnis zwischen der verbrauchten und der zugespeisten U^{235}-Menge pro cm^3 und sec. Nach Gl. (IV, 53) bis (IV, 55) erhalten wir:

$$A = \frac{(\sigma^a_1\,\Phi\,X_1 + \sigma^a{}_2\,\Phi\,X_2)\,\tau}{X_{10}} =$$

$$= \frac{\left\{1 - e^{-\sigma^a{}_1\,\Phi\,\tau}\right\}\left\{1 + (\eta_1 - \eta_2)\,(1-p)\,P_s\,\varepsilon\right\} + \dfrac{\sum y}{\sum^a_{X_{10}}}\,\sigma^a_1\,\Phi\,\tau}{1 - \eta_2\,P_s\,\varepsilon\,(1-p)}.$$

In den folgenden graphischen Darstellungen sind in Abhängigkeit von der Dosis $\Phi\tau$ die effektive Ausnutzung A und die relative Reaktivitätsänderung D aufgetragen.

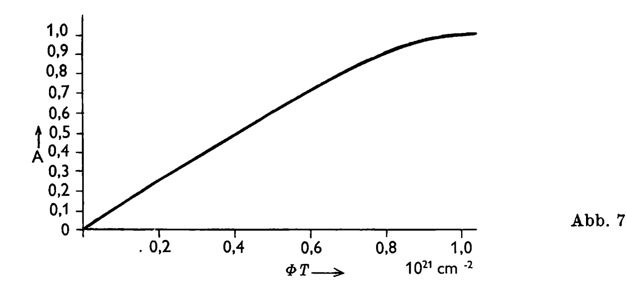


Abb. 7

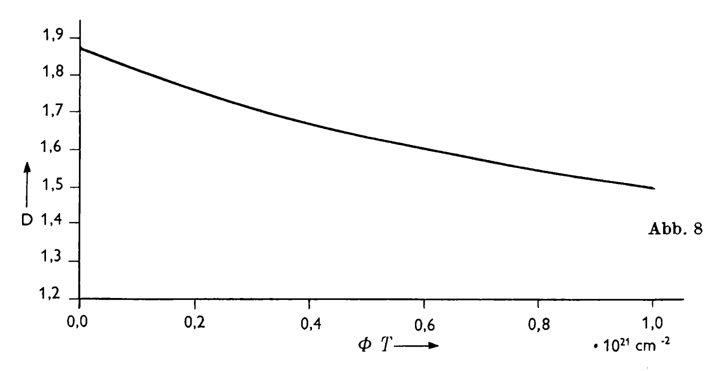


Abb. 8

Um beurteilen zu können, bis zu welchen Dosen $\Phi\,\tau$ das Plutoniumspeicherverfahren angewendet werden kann, wollen wir noch den Multiplikationsfaktor k_{eff} in Abhängigkeit von $\Phi\,\tau$ aufzeichnen.

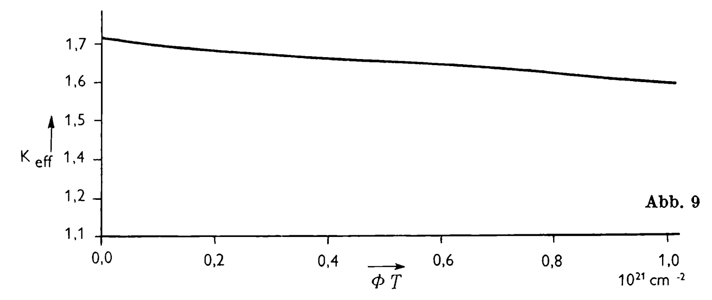


Abb. 9

Dieser Multiplikationsfaktor k_{eff} läßt sich in einem Reaktor, der für natürliches Uran ausgelegt ist, mit Hilfe P_n-Speicherprinzips erreichen. Er ist mit den konstanten und veränderlichen Größen des betrachteten Natururanreaktors in folgender Weise verknüpft. Zunächst bestimmen wir die effektiven Multiplikationskonstante eines Natururanreaktors:

$$k_{eff\,0} = \frac{\nu_1\, \sigma_1^{sp} X_{10} \cdot \varepsilon \cdot P_s \cdot p}{\sigma^a{}_1 X_{10} + \sum y + \sum m\,(1 + B^2 L_m^2) + \sum v}. \qquad \text{(IV, 59)}$$

Beim Start des Reaktorbetriebs ist $k_{eff_0} = 1$.

Hieraus folgt:

$$\nu\, \sigma_1^{sp} X_{10}\, \varepsilon\, P_s\, p - \sigma_1^a X_{10} = (\eta_1\, \varepsilon\, P_s\, p - 1)\, \sigma_1^a X_{10} =$$
$$= \Sigma_y + \Sigma_m (1 + B^2 L_m^2) + \Sigma_v. \qquad \text{(IV, 60)}$$

Der betrachtete Plutoniumspeicherreaktor soll den gleichen Brutstoff- wie Moderatorgehalt und die gleiche Größe wie der verglichene Natururanreaktor haben. Die Größe Σ_v für die Vergiftung soll ebenfalls in beiden Stoffen gleich sein. Dann ist der Multiplikationsfaktor k_{eff} für den Plutoniumspeicherreaktor:

$$k_{eff\,Pu} = \frac{(\nu_1\,\sigma_1^{sp}\,X_1 + \nu_2\,\sigma_1^{sp}\,X_2)\;P_s\,\varepsilon\,p}{\sigma_1^a\,X_1 + \sigma_2^a X_2 + \sum_y + \sum_m (1 + B_2\,L_m^2) + \sum_v}. \qquad \text{(IV, 61)}$$

Wir vergleichen die beiden Multiplikationsfaktoren (für den Natururan- und den Plutoniumspeicherreaktor) miteinander und stellen fest, daß die drei letzten Summanden des Nenners in Gl. (IV, 61) gleich dem Ausdruck in Gl. (IV, 60) werden müssen.

$$k_{eff\,Pu} = \frac{(\nu_1\,\sigma_1^{sp}\,X_1 + \nu_2\,\sigma_2^{sp}\,X_2)\;P_s\,\varepsilon\,p}{\sigma_1^a\,X_1 + \sigma_2^a\,X_2 + (\eta_1\,\varepsilon\,P_s\,p - 1)\,\sigma_1^a\,X_{10}}. \qquad \text{(IV, 62)}$$

Dann ist $k_{eff\;Pu}$ derjenige Multiplikationsfaktor, der sich mit dem Plutoniumspeicherprinzip in einem Natururanreaktor erzielen läßt. In der Praxis wird man einen Plutoniumspeicherreaktor allerdings anders auslegen; vor allem werden seine Abmessungen kleiner als die eines Natururanreaktors sein – d. h. der Ausfluß B^2L^2 wird größer; seine Leistungsdichte ist größer als die eines einfachen Natururanreaktors –, d. h. die Vergiftung wird größer.

Um die Verhältnisse beim Plutoniumspeicherreaktor mit denen beim Natururanreaktor vergleichen zu können, werden die Gln. (IV, 50) bis (IV, 54) in Gl. (IV, 62) eingesetzt und folgendes Resultat erzielt:

$$k_{eff\,Pu} = \frac{(\eta_1\,Dr + \eta_2)\;P_s\,p\varepsilon}{1 + Dr - (\eta_1\,\varepsilon\,P_s\,p - 1)\,(\eta_2\,\varepsilon\,P_s\,[1-p] - 1)\,r}. \qquad \text{(IV, 63)}$$

Dabei wurde $\dfrac{(1 - e^{-\,\sigma_1^a\,\Phi\,t})}{\sigma_1^a\,\Phi\,t} = D$ und $\dfrac{\sum_{x10}^a}{\sum_y} = r$ gesetzt und $(\eta_1 - \eta_2)$ $P_s\,\varepsilon\,(1-p)$ gegen 1 vernachlässigt.

Den Anschluß an das technische Maß der Spaltstoffausnutzung gewinnt man, indem man die Dosis $\Phi\,\tau = 10^{21}\ \text{cm}^{-2}$ auf das in der Technik übliche Maßsystem in Mwd/t umrechnet.

Die Anzahl der Spaltungen, die pro cm^3 bei der Dosis $\Phi\,\tau$ stattfinden, ist:

$$N = (X_1 \sigma_1^{sp} \Phi \tau + X_2 \sigma_2^{sp} \Phi \tau) = \tag{IV, 64}$$

$$= X_{10} \left\{ \frac{\eta_1}{\nu_1} + \frac{\eta_1 \eta_2 \varepsilon (1 - p) P_s}{\nu_2 (1 - \eta_2 \varepsilon P_s [1 - p])} \right\} \left[1 - e^{-\sigma_1^a \Phi \tau} \right] +$$

$$+ \frac{\eta_2 X_{10}}{\nu_2 (1 - \eta_2 \varepsilon P_s [1 - p])} \cdot \frac{\sum y}{\sum x_{10}} \Phi \sigma_1^a \tau.$$

Nun ist $X_{10} = \frac{L\varrho}{M_{10}}$ (L = Loschmidtsche Zahl; ϱ = Dichte des U^{235} und M_{10} = Molekulargewicht des U^{235} in Gramm.)

Es sei V das Volumen einer Tonne Uran, dann ist: $X_{10} \cdot V = \frac{L \varrho V}{M_{10}} = \frac{L \cdot G}{M_{10}}$ (G = Gesamtgewicht aller U^{235}-Atome in Gramm) die Gesamtzahl aller U^{235}-Atome im Natururan.

Die aus einer Tonne Uran gewonnene Wärmemenge ist dann bei der Dosis $\Phi \tau$:

$$E = X_{10} \cdot V \cdot E_{sp} = \frac{L \cdot G}{M_{10}} \left\{ \frac{\eta_1}{\nu_1} + \frac{\eta_1 \eta_2 \varepsilon P_s (1 - p)}{\nu_2 (1 - \eta_2 \varepsilon P_s [1 - p])} \right\} (1 - e^{-\sigma_1^a}) +$$

$$+ \frac{\eta_2 \sum y \Phi \sigma_1^a \tau}{\nu_2 (1 - \eta_2 P_s \varepsilon [1 - p]) \sum_{x10}^a}. \tag{IV, 65}$$

Für $L = 6 \cdot 10^{23}$; $G = 7000$ g; $M_{10} = 235$ g und $\Phi\tau = 10^{21}/\text{cm}^{-2}$ und der Spaltungsenergie $E_{sp} = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ wsec ist:

$$E = 6400 \text{ Mwd.} \tag{IV, 66}$$

Die in dem Diagramm (Fig. 7 bis Fig. 9) als rechte Begrenzung gewählte Dosis entspricht also bereits einer Energieerzeugung wie sie ein Plutoniumspeicherreaktor mit natürlichem Uran von mehr als 6000 Mwd/t produzieren würde.

Das Plutoniumspeicherprinzip ist also technisch sehr interessant. Die größte Schwierigkeit, die eine Anwendung in Reaktoren bereitet, ist die Forderung eines möglichst kontinuierlichen Betriebes bei gleichzeitigem, möglichst häufigem Brennelementaustausch. Da der Betrieb beim Auswechseln der Brennelemente unterbrochen werden muß, ist eine kontinuierliche oder auch nur quasikontinuierliche Beschickung meistens ausgeschlossen.

Eine andere Komplikation, die noch für alle Brut- und Konversionsvorgänge zu besprechen ist, stellt das Auftreten höherer Isotope der Spaltstoffe dar, die am Reaktorprozeß teils als Neutronenabsorber (d. h. Vergifter) teils als neuer Spaltstoff beteiligt sind.

4. *Der Einfluß der Isotope mit hoher Massenzahl, die bei Brut- und Konversionsprozessen entstehen, auf den Neutronenhaushalt*

Bei allen Brut- und Konversionsvorgängen werden u. a. auch schwere Atomkerne durch Neutroneneinfang aufgebaut, die zwar nicht spaltbar sind, aber durch weiteren Neutroneneinfang oder andere atomare Prozesse zum Teil zu tertiärem Spaltstoff werden. Wir betrachten zunächst das Generationsschema für den U^{233}–Th^{232}-*Brutzyklus.*

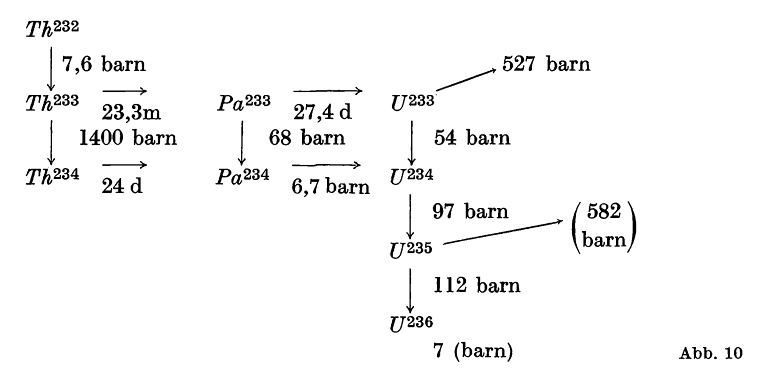


Abb. 10

Hier bedeuten:

Pfeile nach unten = Absorption eines Neutrons mit Übergang des Kerns in das nächsthöhere Isotop. Die angeschriebene Zahl gibt den Einfangquerschnitt an.

Pfeile waagerecht nach rechts = Betaübergang eines Kerns in einen Kern höherer Ordnungszahl. Die angeschriebene Zahl bedeutet die mittlere Zerfallszeit (Halbwertszeit).

Pfeile nach rechts oben = Spaltung. Die angeschriebenen Zahlen geben den Spaltungsquerschnitt an.

An diesem Schema sieht man, daß die Kerne Th^{233} und Th^{234} sowie Pa^{233} und Pa^{234} sowohl durch Betazerfall in den Kern der nächsthöheren Ordnung als auch durch Neutroneneinfang in das Isotop nächsthöherer Massenzahl übergehen können.

Wie bei der Ableitung der Gl. (IV, 1) berücksichtigen wir, daß die Umwandlungsrate für Betazerfall gleich λX ist, wenn X die Konzentration der betreffenden Kernsorte und λ die zugehörige Zerfallskonstante ist. Die Umwandlungsrate für einen Neutroneneinfang ist $\sigma^a \Phi X$, wenn der zugehörige Absorptionsquerschnitt σ^a ist.

Wir wollen beurteilen, wie sich diese verschiedenen entstehenden Kernsorten zusammensetzen, und betrachten zunächst einmal das Verhältnis zwischen den beiden Umwandlungsraten. (Φ sei pessimistisch auf $10^{14}/\text{cm}^2$ sec eingesetzt.)

Tabelle 3

	λ	$\sigma^a \Phi$	$\frac{\sigma^a \Phi}{\lambda + \sigma^a \Phi}$
Th^{233}	$0{,}5 \cdot 10^{-2}$/sec	$1{,}4 \cdot 10^{-7}$/sec	~ 0
Th^{234}	$3{,}4 \cdot 10^{-7}$/sec	$1{,}8 \cdot 10^{-10}$/sec	$0{,}5 \cdot 10^{-3}$
Pa^{233}	$3{,}0 \cdot 10^{-7}$/sec	$6{,}8 \cdot 10^{-9}$/sec	$0{,}22 \cdot 10^{-1}$
Pa^{234}	$3{,}1 \cdot 10^{-5}$/sec	$1{,}2 \cdot 10^{-8}$/sec	$0{,}4 \cdot 10^{-3}$

Die Tabelle zeigt, daß außer dem Weg des normalen Brutprozesses nur der Weg vom Th^{233} zum U^{234} über Pa^{233} und Pa^{234} zu einer wesentlichen Abzweigung von Neutronen führt.

Den Einfluß auf den Konversions- und Brutfaktor haben wir in Gl. (IV, 1) bereits berücksichtigt. Wir wollen nun den Neutronenverlust ermitteln, der durch die Kernsorten Th^{233}, Th^{234}, Pa^{233} und Pa^{234} verursacht wird.

Im folgenden werden alle Konzentrationen mit X_{ik} bezeichnet (i = letzte Stelle der Ordnungszahl; k = letzte Ziffer der Massenzahl). Die Konzentration von Th^{232} wird z. B. mit X_{02} und die von U^{233} z. B. mit X_{23} bezeichnet. Für die Konzentrationen der hier interessierenden Atomkerne erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\frac{d X_{03}}{dt} = \Sigma^*_{02} \Phi - \lambda_{03} X_{03} - \sigma_{03} \Phi X_{03}. \qquad \text{(IV, 67)}$$

Nach den Überlegungen, die zu Gl. (IV, 6) führten, ist:

$$\Sigma^*_{02} = \Sigma^a_{02} + \nu \Sigma_{sp} \varepsilon P_s (1 - p) \qquad \text{(IV, 68)}$$

und

$$X_{03} = \frac{\Sigma^*_{02} \Phi}{\lambda_{03} + \sigma^a_{03} \Phi} \left\{ 1 - e^{-(\lambda_{03} + \sigma^a_{03} \Phi) t} \right\}. \qquad \text{(IV, 69)}$$

Weil λ_{03} bewirkt, daß eine Gleichgewichtskonzentration schnell erreicht wird, und da $\lambda_{03} \gg \sigma_{03}\,\Phi$ ist, erhalten wir:

$$X_{03} = \frac{\Sigma^*{}_{02}\,\Phi}{\lambda_{03}} \tag{IV, 70}$$

Die Th^{234}-Konzentration ist nach Tabelle 3 so klein, daß sie vernachlässigt werden kann.

Es folgt nun die Gleichung für die Pa^{233}-Konzentration.

$$\frac{d\,X_{13}}{dt} = \lambda_{03}\,X_{03} - \lambda_{13}\,X_{13} - \sigma_{13}\,\Phi\,X_{13}. \tag{IV, 71}$$

λ_{13} entspricht einer Halbwertszeit von 27,4 Tagen. Gemessen an der Dauer des Reaktorbetriebes ist diese Zeit so klein, daß wir annehmen können, X_{13} befinde sich in der Gleichgewichtskonzentration. Also:

$$X_{13} = \frac{\lambda_{03}\,X_{03}}{\lambda_{13} + \sigma_{13}\Phi} = \frac{\Sigma^*{}_{02}\,\Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13}\Phi}. \tag{IV, 72}$$

Die letzte Umwandlung folgt nach Gleichung (IV, 70). Für die Pa^{234}-Konzentration:

$$\frac{d\,X_{14}}{dt} = \sigma_{13}\,X_{13}\,\Phi - \lambda_{14}\,X_{14} - \sigma_{14}\,\Phi\,X_{14} \tag{IV, 73}$$

gelten die gleichen Überlegungen, wie sie für Th^{233} angestellt wurden, da $\lambda_{14} \gg \sigma_{14}\,\Phi$ ist und schnell der Gleichgewichtszustand erreicht wird.

$$X_{14} = \frac{\sigma_{13}\,X_{13}\,\Phi}{\lambda_{14}} = \frac{\sigma_{13}\,\Phi}{\lambda_{14}}\,\frac{\Sigma^*{}_{02}\,\Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13}\Phi}. \tag{IV, 74}$$

Für die Bestimmung der U^{234}-Konzentration muß berücksichtigt werden, daß U^{234} auf zwei Weisen entstehen kann. Erstens über U^{233} und zweitens über Pa^{234}. Wir bestimmen zunächst die Konzentration des U^{233}, das aus Pa^{233} entsteht.

$$\frac{d\,X_{23}}{dt} = \lambda_{13}\,X_{13} - \sigma_{23}\,\Phi\,X_{23}. \tag{IV, 75}$$

Mit Hilfe von Gl. (IV, 72) und (IV, 68) erhalten wir daraus:

$$\frac{d\,X_{23}}{dt} = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{13} + \sigma_{13}\Phi}\left\{\Sigma^a_{02}\,\Phi + \nu\,\sigma^{sp}_{23}\,P_s\,\varepsilon\,(1-p)\,X_{23}\,\Phi\right\} - \sigma_{23}\,\Phi\,X_{23} \tag{IV, 76}$$

Diese Gleichung ist mit Gl. (IV, 6) identisch, wenn wir wieder den Verlustkoeffizienten einführen, Gl. (IV. 4).

In Kapitel 12 war für die Brutprozesse festgestellt worden, daß für einen Brutreaktor die Bedingung $\frac{d\,X_{23}}{dt} = 0$ sehr schwer erfüllbar ist. Es zeigte sich, daß ein kleiner Ergänzungsbedarf an neuem Spaltstoff stets erforderlich ist und die Konzentration X_{23} langsam ansteigt. Für unsere qualitativen Betrachtungen reicht es jedoch aus, X_{23} als konstant anzunehmen. Wir erhalten somit aus Gl. (IV, 76):

$$X_{23} = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{13} + \sigma_{13}\Phi} \cdot \frac{\Sigma^*{}_{02}}{\sigma_{23}} \qquad \text{(IV, 77)}$$

Betrachten wir nun die Konzentrationsänderungen für U^{234} und schreiben:

$$\frac{d\,X_{24}}{dt} = \alpha_{23}\,\sigma_{23}\,X_{23}\,\Phi + \lambda_{14}\,X_{14} - \sigma_{24}\,\Phi\,X_{24}. \qquad \text{(IV, 78)}$$

Nach S. 103 in Bd. I ist α_{23} derjenige Teil der U^{233}-Kerne, der beim Neutroneneinfang in U^{234}-Kerne umgewandelt wird. Wir setzen X_{23} und X_{14} aus Gl. (IV, 77) und (IV, 74) ein und erhalten:

$$\frac{d\,X_{24}}{dt} = \alpha_{23}\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{13} + \sigma_{12}\,\Phi}\,\Sigma^*_{02}\;\Phi + \frac{\sigma_{13}\Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13}\,\Phi}\,\Sigma^*_{20}\,\Phi - \sigma_{25}\,\Phi\,X_{24}. \qquad \text{(IV, 79)}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$X_{24} = \left\{\frac{\alpha_{23}\,\lambda_{13} + \sigma_{13}\,\Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13}\,\Phi}\right\}\frac{\Sigma^*{}_{02}}{\sigma_{24}}\left\{1 - e^{-\sigma_{24}\,\Phi\,t}\right\} \qquad \text{(IV, 80)}$$

Schließlich soll noch die Konzentration von U^{235} bestimmt werden. Für unsere Betrachtungen soll das aus U^{234} durch Neutroneneinfang entstandene U^{235} ausschließlich berücksichtigt werden. Den Einfluß des U^{236} auf diese Vorgänge können wir vernachlässigen, da dieser Stoff einen sehr kleinen Absorptionsquerschnitt hat (7 barn).

Für U^{235} erhalten wir folgende Konzentrationsgleichung:

$$\frac{d\,X_{25}}{dt} = \sigma_{24}\,X_{24}\,\Phi - \sigma_{25}\,\Phi\,X_{25}. \qquad \text{(IV, 81)}$$

Wir setzen Gl. (IV, 80) in Gl. (IV, 81) ein und erhalten:

$$\frac{d X_{25}}{dt} = \Sigma^*_{02}\, \Phi \left\{ \frac{\alpha_{23}\, \lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi} \right\} \left\{ 1 - e^{-\sigma_{24}\, \Phi\, t} \right\} - \sigma_{25}\, \Phi\, X_{25} \tag{IV, 82}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$X_{25} = \frac{\Sigma^*_{02}}{\sigma_{24}} \left\{ \frac{\alpha\, \lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi} \right\} \left\{ \frac{\sigma_{24}}{\sigma_{25}} (1 - e^{-\sigma_{25}\, \Phi\, t}) - \frac{\sigma_{24}}{\sigma_{24} - \sigma_{25}} (e^{-\sigma_{25}\, \Phi\, t} - e^{-\sigma_{25}\, \Phi\, t}) \right\}. \tag{IV, 83}$$

Wir beziehen nun den schädlichen Absorptionsquerschnitt aller uns interessierenden höheren Isotope des Spalt- und des Brutstoffes auf die Größe Σ_a, den makroskopischen Absorptionsquerschnitt des Spaltstoffes (für $\Phi = 10^{14}\ \text{cm}^2\ \text{sec}$)

$$\frac{\Sigma_s}{\Sigma_{23}} = \frac{\Sigma_{03} + \Sigma_{13} + \Sigma_{14} + \Sigma_{24} + \Sigma_{25}}{\Sigma_{23}}. \tag{IV, 84}$$

Für die verschiedenen Absorptionsquerschnitte gelten nach Gl. (III, 16) die Beziehungen:

$$\frac{\Sigma^*_{02}}{\Sigma_{23}} = C = \frac{\Sigma_{02}}{\Sigma_{23}} + \eta_{23}\, P_s\, \varepsilon\, (1 - p),$$

$$\frac{\Sigma_{03}}{\Sigma_{23}} = C \cdot \frac{\sigma_{03}}{\lambda_{03}}\, \Phi = 2{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot C, \qquad \text{(vernachlässigbar)}$$

$$\frac{\Sigma_{13}}{\Sigma_{23}} = C \cdot \frac{\sigma_{13} \Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi} = 2{,}22 \cdot 10^{-2}\, C,$$

$$\frac{\Sigma_{14}}{\Sigma_{23}} = C \cdot \frac{\sigma_{13} \Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi}\, \frac{\Phi\, \sigma_{14}}{\lambda_{14}} = 0{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot C, \quad \text{(vernachlässigbar)}$$

$$\frac{\Sigma_{24}}{\Sigma_{23}} = C \cdot \frac{\alpha_{23}\, \lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi} \left\{ 1 - e^{-\sigma_{24}\, \Phi\, t} \right\} =$$

$$= C \cdot 0{,}12 \cdot (1 - e^{-\sigma^a_{24}\, \Phi\, t})$$

$$-\frac{\Sigma_{25}}{\Sigma_{23}}(\eta_{25}P_s p\varepsilon - 1) = -C(\eta_{25} p P_s \varepsilon - 1)\left\{\frac{\alpha_{23}\lambda_{13} + \sigma_{13}\Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13}\Phi}\right\} \times$$

$$\times\left\{(1 - e^{-\sigma_{25}\Phi t}) + \frac{\sigma_{25}}{\sigma_{24} - \sigma_{25}}(e^{-\sigma_{24}\Phi} - e^{-\sigma_{25}\Phi t})\right\} = -C\cdot 0{,}09\times$$

$$\times\left\{(1 - e^{-\sigma_{25}\Phi t}) + 1{,}16\,(e^{-\sigma_{25}\Phi t} - e^{-\sigma_{24}\Phi t})\right\}. \qquad \text{(IV, 85)}$$

Bei der Bestimmung des Absorptionsquerschnittes von U^{235} wurde berücksichtigt, daß U^{235} nicht nur Neutronen absorbiert, sondern auch gespalten werden kann und dabei neue Neutronen erzeugt; hierfür wurde der Summand $\eta_{25}P_s p\varepsilon$ eingesetzt.

Wir summieren die beiden letzten Absorptionstherme aus Gl. (III, 16) und erhalten:

$$\frac{\Sigma_{24} + \Sigma_{25}(1 - \eta_{25}P_s p\varepsilon)}{\Sigma_{23}} = C\left\{0{,}03 - 0{,}014\,e^{-\sigma_{25}\Phi t} - 0{,}017\,e^{-\sigma_{24}\Phi t})\right\}. \qquad \text{(IV, 86)}$$

Die Gesamtheit aller Absorptionstherme summiert ergibt:

$$\frac{\Sigma_s}{\Sigma_{23}} = C\left\{0{,}052 - 0{,}014\,e^{-\sigma_{25}\Phi t} - 0{,}017\,e^{-\sigma_{24}\Phi t}\right\}. \qquad \text{(IV, 87)}$$

Hier sind für die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit p und den Ausflußfaktor P_s für schnelle Neutronen übliche Werte $p = 0{,}9$ und $P_s = 0{,}93$ angenommen. Die schweren Kernisotope von Brut- und Spaltstoff verursachen einen Neutronenverlust, der zwischen 2 und 5% liegt, je nach der Bestrahlungsdosis des Spaltstoffs.

Die Absorption von schnellen Neutronen wurde nicht berücksichtigt, da sie wahrscheinlich im Verhältnis zu den thermischen Einfangquerschnitten zu geringfügig ist, als daß von ihr eine wesentliche Änderung unserer Ergebnisse zu erwarten wäre. Die Einfangquerschnitte für diese Reaktionen sind bisher auch noch nicht gemessen worden.

Als nächstes betrachten wir die schädliche Absorption der erzeugten schweren Isotope beim U^{235} U^{238}–Pu^{239}-*Prozeß*.

Mit den gleichen Bezeichnungen wie in Abb.10 schreiben wir zunächst das Umwandlungsschema für die Umwandlungsmöglichkeiten des U^{235} auf.

$$U^{235} \xrightarrow{(112\ \text{barn})} U^{236} \xrightarrow{(7\ \text{barn})} U^{237}$$

Abb. 11

Wir brauchen die Umwandlungskette nicht weiter zu verfolgen, da die Bildungsrate von U^{237} außerordentlich klein ist.

Für die U^{236}-Konzentration ergibt sich:

$$\frac{d X_{26}}{dt} = \alpha_{25} \sigma_{25} X_{25} \Phi - \sigma_{26} X_{26} \Phi \qquad \text{(IV, 88)}$$

Die Lösung heißt:

$$\sigma_{26} X_{26} = \alpha_{25} \sigma_{25} X_{25} \{ 1 - e^{-\sigma_{26} \Phi t} \}. \qquad \text{(IV, 89)}$$

Der Absorptionstherm ist:

$$\frac{\Sigma_{26}}{\Sigma_{25}} = \alpha_{25} \left\{ 1 - e^{-\sigma_{26} \Phi t} \right\}. \qquad \text{(IV, 90)}$$

Diese Vergiftung beträgt nach einer Dosis von $\Phi t = \frac{1}{\sigma_{25}}$, wenn also der Anteil des ursprünglich vorhandenen U^{235} auf den $\frac{1}{e}$ ten Teil seines Anfangswertes gesunken ist, weniger als 2%.

Für die Umwandlung des U^{238} in Plutonium ist analog zu Abb. 10 folgendes Schema angeführt:

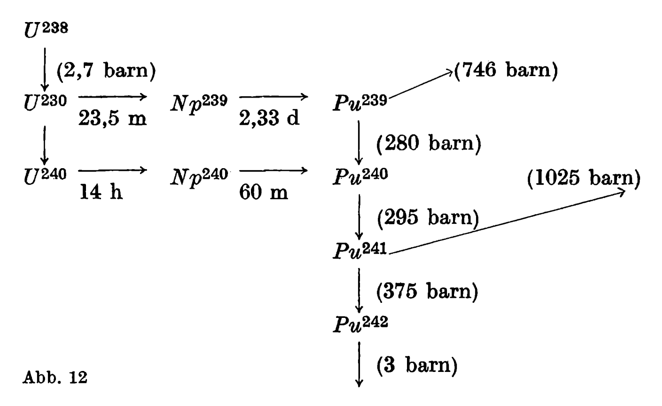


Abb. 12

Dem Schema kann man sofort entnehmen, daß an den Verzögerungspunkten U^{239} und Np^{239} praktisch keine Neutronenverluste auftreten. Man darf also annehmen, daß für die Umwandlung von U^{238} in Pu^{239}

durch einen Brut- oder Konversionsprozeß sich sofort ein Gleichgewicht zwischen den Konzentrationen dieser Stoffe einstellt. Damit ergibt sich:

$$\frac{d\,X_{49}}{dt} = \Sigma^*{}_{28}\,\Phi - \sigma_{49}\,\Phi\,X_{49}. \tag{IV, 91}$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung erhalten wir den gleichen Ausdruck wie in Gl. (IV, 31).

Die Lösung des Gesamtproblems erfordert eine zwar nicht schwierige, aber umständliche Rechenarbeit. Wir beschränken uns daher auf die Behandlung eines Spezialfalles.

Wir nehmen an, daß sich die Pu^{239}-Konzentration bereits im Gleichgewicht befindet, während die Konzentrationen für Pu^{240} und Pu^{242} diesen Zustand noch nicht erreicht haben. Für diese beiden Konzentrationen stellt sich zuerst zum Zeitpunkt $t = \frac{2}{\sigma_{49}\,\Phi}$, also etwa 8 Monate nach Betriebsbeginn, ein stationärer Zustand ein (es ist wieder $\Phi = 10^{14}/$ cm^2 sec vorausgesetzt).

Für die Gesamtvergiftung durch die schweren Plutoniumisotope führen wir eine pessimistische obere Abschätzung durch. Die Gesamtkonzentration des Pu^{239} für $\frac{d\,X_{49}}{dt} = 0$ ist:

$$X_{49} = \frac{\Sigma^*{}_{28}}{\sigma_{49}}. \tag{IV, 92}$$

Die Konzentrationsänderung des nachfolgenden Pu^{240} ergibt sich zu:

$$\frac{d\,X_{40}}{dt} = \alpha_{49}\,\sigma_{49}\,\Phi\,X_{49} - \sigma_{40}\,X_{40}\,\Phi \tag{IV, 93}$$

(α_{49} gibt an, welcher Bruchteil des Gesamtabsorptionsquerschnitts zum Umwandlungsprozeß $Pu^{239} + n \rightarrow Pu^{240}$ gehört).

Die Lösung der Gl. (IV, 93) lautet:

$$X_{40} = \frac{\alpha_{49}\,\sigma_{49}\,X_{49}}{\sigma_{40}} \left\{1 - e^{-\sigma_{40}\,\Phi\,t}\right\} = \alpha_{49}\,\frac{\Sigma^*{}_{28}}{\sigma_{40}} \left\{1 - e^{-\sigma_{40}\,\Phi\,t}\right\}. \tag{IV, 94}$$

Wir betrachten nun die Pu^{241}-Konzentration:

$$\frac{d X_{41}}{dt} = \sigma_{40}\, \Phi\, X_{40} - \sigma_{41}\, \Phi\, X_{41} \tag{IV, 95}$$

und

$$X_{41} = \alpha_{49} \frac{\Sigma_{28}^*}{\sigma_{41}} \left\{ 1 - e^{-\sigma_{41} \Phi t} \right\} + \alpha_{49} \frac{\Sigma_{28}^*}{\sigma_{41} - \sigma_{40}} \times \times \left\{ e^{-\sigma_{41} \Phi t} - e^{-\sigma_{40} \Phi t} \right\}. \tag{IV, 96}$$

Für Pu^{242} gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{d X_{42}}{dt} = \alpha_{41}\, \Phi\, \sigma_{41}\, X_{41} - \sigma_{42}\, \Phi\, X_{42} \tag{IV, 97}$$

und

$$X_{42} = \alpha_{41}\, \alpha_{49}\, \Sigma^*_{28} \left\{ \frac{1}{\sigma_{42}} (1 - e^{-\Phi \sigma_{42} t}) + \frac{\sigma_{40}}{(\sigma_{40} - \sigma_{41})\,(\sigma_{41} - \sigma_{42})} \times \times (e^{-\sigma_{41} \Phi t} - e^{-\sigma_{42} \Phi t}) + \frac{\sigma_{41}}{(\sigma_{40} - \sigma_{41})\,(\sigma_{40} - \sigma_{42})} \times \times \left[e^{-\sigma_{42} \Phi t} - e^{-\sigma_{40} \Phi t} \right] \right\}. \tag{IV, 98}$$

Mit den gewonnenen Konzentrationen berechnen wir den Gesamtvergiftungsquerschnitt der höheren Plutoniumisotope. Dabei berücksichtigen wir, daß Pu^{241} nicht nur Neutronen absorbiert, sondern auch gespalten werden kann und seinerseits neue Neutronen liefert. Wir multiplizieren also X_{41} mit dem Faktor $(1 - \eta_{41} P_s [1 - p])$.

Die Gesamtvergiftung, bezogen auf den makroskopischen Absorptionsquerschnitt der Spaltstoffe in der Anfangskonzentration, ist:

$$\frac{\Sigma_s}{\Sigma_{25}} = \frac{\Sigma_{40} + (1 - \eta_{41} P_s\, \varepsilon\, p)\, \Sigma_{41} + \Sigma_{42}}{\Sigma^*_{25}} = C \cdot \alpha_{49}$$

$$\left\{ (1 - e^{-\sigma_{40} \Phi t}) + (1 - \eta_{41} P_s\, \varepsilon\, p) \left[(1 - e^{-\sigma_{41} \Phi t}) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_{41}}{\sigma_{41} - \sigma_{40}} (e^{-\sigma_{41} \Phi t} - e^{-\sigma_{40} \Phi t}) \right] +$$

$$+ \alpha_{41} \left[(1 - e^{-\sigma_{42} \Phi t}) + \frac{\sigma_{40} \cdot \sigma_{42}}{(\sigma_{40} - \sigma_{41})(\sigma_{41} - \sigma_{42})} (e^{-\sigma_{41} \Phi t} - e^{-\sigma_{42} \Phi t}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_{41} \sigma_{42}}{(\sigma_{40} - \sigma_{41})(\sigma_{40} - \sigma_{42})} (e^{-\sigma_{42} \Phi t} - e^{-\sigma_{40} \Phi t}) \right] \Bigg\} \qquad \text{(IV, 99)}$$

Es soll der Grenzwert der Gesamtvergiftung für $\Phi t \rightarrow \infty$ festgestellt werden:

$$\frac{\Sigma_s}{\Sigma^*_{25}} = C \alpha_{49} \left\{ 1 + (1 - \eta_{41} P_s \varepsilon p) + \alpha_{41} \right\}. \qquad \text{(IV, 100)}$$

Die Werte für $\alpha_{41} = 0{,}27$ und $\alpha_{49} = 0{,}5$ sind bekannt. Für $\eta_{41} P_s p \varepsilon$ liegt der Wert noch nicht genau fest; wir wollen ihn optimistisch auf zwei schätzen. Selbst bei dieser optimistischen Annahme gibt es noch einen Vergiftungsverlust durch die höheren Plutoniumisotope von etwa 0,135.C, also von 10 bis 12%.

Nach einer Bestrahlungsdosis von $\Phi t = \frac{1}{\sigma_{41}} \approx 10^{21}/\text{cm}^2$ wird nach Gl. (IV, 99) die Vergiftung $\frac{\Sigma_s}{\Sigma_{25}} = 0{,}07.C$, also etwa 6%.

Wir sehen also, daß die Folgeprodukte des Pu^{239} wesentlich stärkere Vergiftungen hervorrufen als die des U^{233}. Sollte der Wert von η_{41} noch kleiner sein, als oben angenommen wurde, dann läßt sich das Plutoniumspeicherprinzip nicht verwirklichen. Da das Plutonium ständig wieder gebraucht werden soll, werden sich nach einigen Brennelementwechseln so viel höhere Isotope des Pu^{239} aufgebaut haben, daß die Reaktivität stark abnimmt – s. Gl. (IV, 100).

Man könnte diesen Effekt nur dadurch abschwächen, daß man ständig einen gewissen Bruchteil des Plutoniums völlig entfernt und neues Plutonium, das die höheren Isotope nicht enthält, zusetzt. Schließlich besteht noch die Möglichkeit, die höheren Plutoniumisotope durch Isotopentrennung abzuschneiden. Diese Maßnahme würde erlauben, das Plutoniumspeicherprinzip in vollem Umfange anzuwenden.

Für die Reaktoren mit angereichertem Uranspaltstoff sind die obigen Betrachtungen unwichtig, da der Anfangskonversionsfaktor C kleiner ist als bei natürlichem Uran, und auch die Ausnutzungszeiten klein sind im Vergleich zu den Zeiten, in denen die höheren Plutoniumisotope ent-

stehen. Die Vergiftung durch schwere Isotope wird erst wieder akut, wenn das Plutonium, das aus den ausgebrannten Spaltstoffelementen gewonnen wurde, weiterverwendet wird.

Wir wollen für die Plutoniumvergiftung noch eine andere Art der Abschätzung anfügen, die besonders kurz und einleuchtend ist. Wir betrachten den Zustand, in dem Pu^{240} und Pu^{241} ihre Gleichgewichtskonzentrationen erreicht haben. Dann ist nach Gl. (IV, 93) und Gl. (IV, 95) (bei konstanten Pu^{239}-Konzentrationen):

$$X_{40}\,\sigma_{40} = \alpha_{49}\,\sigma_{49}\,X_{49};\; X_{41}\,\sigma_{41} = \sigma_{40}\,X_{40} = \sigma_{49}\,X_{49}\,\alpha_{49}. \qquad \text{(IV,101)}$$

Wir bilden den Wert für die Neutronenausbeute (s. Bd. I, S. 103) bei diesem Gleichgewichtszustand:

$$\eta = \frac{\nu_{49}\,\sigma^{sp}{}_{49}\,X_{49} + \nu_{41}\,\sigma^{sp}{}_{41}\,X_{41}}{\sigma_{49}\,X_{49} + \sigma_{40}\,X_{40} + \sigma_{41}\,X_{41}}. \qquad \text{(IV, 102)}$$

Mit den Werten aus Gl. (IV, 101) gewinnt man:

$$\eta = \frac{\eta_{49} + \alpha_{49}\,\eta_{41}}{1 + 2\,\alpha_{49}}. \qquad \text{(IV, 103)}$$

Schätzen wir η_{41} wieder optimistisch auf ungefähr gleich zwei, dann ist $\eta = 1{,}5$. Die Neutronenergiebigkeit des Spaltstoffs hat sich dann gegenüber der des reinen Pu^{239} um den *Faktor* 1,33 verringert. Die auftretende Reaktivitätsminderung ist also beträchtlich.

Wir vergleichen diese Verringerung der Neutronenausbeute bei der Pu^{239}-Reihe mit dem schädlichen Einfluß der höheren Isotope des Urans in der U^{233}-Reihe auf den Konversionsprozeß mit U^{233} als Ausgangsbrennstoff. Für die U^{233}-Reihe ergibt sich eine Neutronenergiebigkeit von

$$\eta = \frac{\eta_{23} + \alpha_{23}\,\eta_{25}}{1 + 2\,\alpha_{23}} = 2{,}11. \qquad \text{(IV, 104)}$$

Sie ist also erheblich größer als bei der Plutoniumreihe.

Wir wollen zum Abschluß dieses Kapitels das Verhältnis der Zeitkonstanten aus beiden Reihen einander gegenüberstellen. Der Aufbau des absorbierenden U^{234} geschieht, verglichen mit dem Verbrauch an Primärspaltstoff, langsamer als der Aufbau des Pu^{240}, verglichen mit dem Pu^{239}-Verbrauch.

In der Pu^{239}-Reihe ist dieses Verhältnis der Zeitkonstanten: $\frac{\sigma_{40}\,\Phi}{\sigma_{49}\,\Phi} =$ $= 0{,}287$. In der U^{233}-Reihe ist es $\frac{\sigma_{24}\,\Phi}{\sigma_{23}\,\Phi} = 0{,}167$.

Das Plutoniumgemisch wirkt also nicht nur wegen seiner Zusammensetzung ungünstiger als das Isotopengemisch der U^{233}-Reihe auf die Neutronenbilanz ein, sondern es wird auch nach kürzerer Zeit als das Urangemisch eine reaktivitätsmindernde Zusammensetzung haben.

Unsere Betrachtungen über die Wirkung der schweren Isotope zeigen, daß diese als Spaltstoffbeimengungen auf die Dauer immer stärkere Vergiftungserscheinungen hervorrufen. Während die vergiftenden Spaltprodukte aus den verbrauchten Brennelementen chemisch entfernt werden können, ist dies bei den schweren Spaltstoffisotopen nicht möglich; für ihre Entfernung müssen physikalische Isotopentrennverfahren herangezogen werden.

Diese Eigenschaften der schweren Isotope sind bei den Berechnungen von Spaltstoff-Brutstoffkreisläufen besonders zu beachten.

V. Die Wärmeeigenschaften eines Reaktors in Abhängigkeit vom Neutronenfluß

Eine der wichtigsten Voraussetzungen für die Reaktorkonstruktion ist die Kenntnis von dem Zusammenspiel zwischen den nuklearen Vorgängen und der Temperaturverteilung innerhalb der Brennelemente und der Kühlgase oder -flüssigkeiten. In Kapitel I dieses Bandes wurde nur von einer mittleren Reaktortemperatur gesprochen, mit deren Anstieg die Reaktivität sinkt. Dieses Bild soll nun verfeinert und vervollständigt werden, indem wir den örtlichen Einfluß der Temperatur auf die Kettenreaktion betrachten.

Die im Reaktor entstehende Wärme wird mit einem durchströmenden Kühlmittel abtransportiert. Das Kühlmittel tritt mit einer bestimmten Temperatur ϑ_0 in den Reaktor ein und verläßt ihn mit der Ausgangstemperatur.

Die Länge des Reaktors in Richtung des Kühlstromes sei l. Die Austrittstemperatur ϑ_e ist stark von der Leistungsverteilung innerhalb des Reaktors abhängig; in Bereichen mit kleinem Neutronenfluß (etwa am Rande des Reaktors) wird weniger Wärme erzeugt, so daß der dort durchfließende Teil des Kühlmittels nur schwach aufgeheizt wird. Es ist aber aus kon-

struktiven Gründen unerläßlich, daß das Kühlmittel aus allen Teilen des Reaktors mit der gleichen Austrittstemperatur herauskommt, da eine nachträgliche Durchmischung der Kühlgase sehr schwierig ist. Diese Angleichung der Temperaturen aneinander würde außerdem eine schlechte Ausnutzung der Reaktorwärme zur Folge haben, da aus thermodynamischen Gründen eine möglichst hohe mittlere Temperatur erreicht werden soll, mit der in der nachgeschalteten Maschine Arbeit geleistet wird. Die Mischtemperatur würde jedoch niedriger sein als die höchste im Reaktor erreichbare Temperatur, die durch die Materialeigenschaften der Brennelemente (Schmelzpunkt etc.) festgelegt ist. Dieses Ziel einer möglichst einheitlichen Austrittstemperatur kann auf zwei Weisen erreicht werden: entweder der Kühlstrom wird in der Reaktoreingangsfläche entsprechend verteilt, oder die Leistungsdichte des Reaktors wird möglichst gut vereinheitlicht.

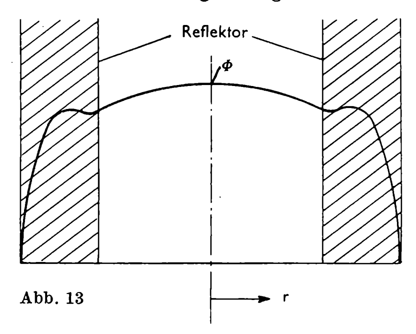


Abb. 13

Bei kleinen Reaktoren mit Reflektor kann die Kurve der Neutronenflußverteilung innerhalb des Reaktors schon durch die Reflektorwirkung erheblich abgeflacht werden (s. Fig. 13). Dies setzt voraus, daß die Reflektorersparnis etwa dieselbe Größe hat wie der Reaktordurchmesser (s. Bd. I, S. 150).

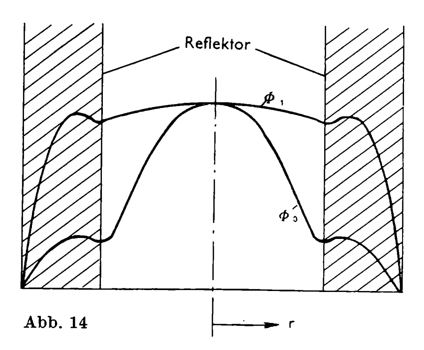


Abb. 14

Außerdem kann man die Neutronenflußstärken der verschiedenen Reaktorzonen durch Einbringen von Absorberstäben aufeinander abstimmen; bzw. man kann die verschieden stark ausgenutzten Brennelemente so anordnen, daß die Kurve für die Neutronenflußverteilung möglichst wenig gekrümmt ist. Solche Operationen können den Neutronenfluß von Φ_0 (vor Ergreifen dieser Maßnahmen) auf Φ_1 anheben (s. Fig. 14).

Diese in Fig. 13 und Fig. 14 veranschaulichten Tatbestände sollen in eine mathematische Form gekleidet werden.

Nach Bd. I, S. 106, Gl. (105) ist die räumliche Verteilung des Neutronenflusses:

$$\Delta\,\Phi + \frac{\Sigma_a + \Sigma_m + \Sigma_v}{D} \cdot (k_\infty\,P_s - 1)\,\Phi = 0. \tag{V, 1}$$

Im Gegensatz zu der zitierten Stelle haben wir die makroskopischen Absorptionsquerschnitte für den Spaltstoff Σ_a, den Moderator Σ_m und die Vergiftung Σ_v nicht zusammengefaßt, sondern einzeln aufgeführt.

Um die Verhältnisse noch besser zu verdeutlichen, wandeln wir mit Hilfe der Vierfaktorformel $k_\infty = \eta\,\varepsilon\,p\,P_s\,f$

und $f = \dfrac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_m + \Sigma_v}$ die Gleichung (IV, 105) noch einmal um:

$$\Delta\,\Phi + \frac{1}{D}\left\{\eta\,\varepsilon\,p\,P_s\,\Sigma_a - (\Sigma_a + \Sigma_m + \Sigma_v)\right\}\Phi = 0 \tag{V, 2}$$

und

$$\Delta\,\Phi + \frac{\Sigma_a}{D}\,(\eta\,\varepsilon\,p\,P_s - 1)\,\Phi - \frac{\Sigma_m + \Sigma_v}{D}\,\Phi = 0 \tag{V, 3}$$

sowie

$$\Delta\,\Phi + \varkappa^2\,\Phi = 0 \tag{V, 4}$$

mit

$$\varkappa^2 = \frac{\Sigma_a}{D}\,(\eta\,\varepsilon\,p\,P_s - 1) - \frac{\Sigma_m + \Sigma_v}{D}. \tag{V, 5}$$

$\varkappa^2$ ist ein Maß für Krümmung der Kurve für die Neutronenflußverteilung in einem Reaktor. Je kleiner $\varkappa^2$ ist, desto flacher ist diese Kurve.

Aus Gl. (V, 4) liest man ab, daß $\varkappa^2$ umso kleiner ist, je größer der Summand $\dfrac{\Sigma_m + \Sigma_v}{D}$ und je kleiner der Ausdruck $\dfrac{\Sigma_a(\eta\,\varepsilon\,P_s\,p - 1)}{D}$ wird.

Die letzte Größe ändert sich mit der Brennstoffkonzentration; die erste kann durch Veränderung der Absorption (z. B. Einführen von Absorberstäben) variiert werden.

$\varkappa^2$ – die „Krümmung des Neutronenflusses" – ist also in weiten Bereichen veränderlich.

In der Technik ist es besonders interessant, für einen Reaktor eine konstante Leistungsdichte zu bekommen. Das heißt:

$$Q = \Sigma_{sp}\, \Phi\, E_{sp} = \text{konst} \quad (E_{sp} = \text{Energie pro Spaltung}) \quad (\text{V}, 6)$$

daraus folgt auch:

$$\Sigma_a\, \Phi = \text{konst, da } \Sigma_{sp} = \frac{1}{1+\alpha}\, \Sigma_a.$$

Die Gleichung (V, 4) heißt dann:

$$\Delta\, \Phi - \varrho^2\, \Phi = -c \qquad (\text{V}, 7)$$

mit

$$\varrho^2 = \frac{\Sigma_m + \Sigma_v}{D} \qquad (\text{V}, 8)$$

und

$$c = \frac{\Sigma_a}{D}\, (\eta\, p\, P_s\, \varepsilon - 1)\, \Phi. \qquad (\text{V}, 9)$$

Wenn am Rande eines Reaktors $\Phi \to 0$, dann muß dort die Spaltstoffkonzentration höher gemacht werden, als es technisch möglich ist; in Wirklichkeit bedingt jedoch der Reflektor, daß der Neutronenfluß am Rande des Reaktors nicht auf Null zurückgeht. Man kann also bei geeigneter Spaltstoffverteilung technisch eine konstante Leistungsdichte erreichen.

Es ist dabei allerdings zu bedenken, daß in einem Reaktor weder das erste, noch das zweite Glied der Gl. (V, 5) konstant gehalten werden kann, sondern daß durch Brut- und Konversionseffekte sowie durch Vergiftungserscheinungen und Temperatureinflüsse diese Größen verändert werden.

$\varkappa^2$ ist also nicht nur eine räumliche, sondern auch eine zeitlich variable Größe. Eine Steuerung von $\varkappa^2$ durch dauernden Umtausch der Brennelemente verschiedenen Erschöpfungsgrades ist technisch nur begrenzt möglich.

Die kritischen Bedingungen für den Reaktor im Betriebszustand erhalten wir, wenn wir nach Gl. (III/7) in Bd. I die Temperaturabhängigkeit von $\varkappa^2$ mitberücksichtigen.

$$\varkappa^2 = \frac{\Sigma_a + \Sigma_m + \Sigma_v}{D}\,(k_\infty\, P_s - 1) = \frac{(\Sigma_a + \Sigma_m + \Sigma_v)_0}{D}\,(k_{\infty 0}\, P_s - 1 - \Gamma T).$$

Der Index $_0$ deutet an, daß die betreffende Größe auf die Eintrittstemperatur ϑ_0 des Kühlgases bezogen ist. T ist die Temperatur oberhalb von ϑ_0, gemesssen in Celsius. Wir erhalten nach Gl. (III 7), Bd. I, für die kritische Bedingung des Reaktors:

$$B^2 = \frac{\int\limits_{V_R} dV \left\{ \frac{(\Sigma_a + \Sigma_m + \Sigma_v)_0}{D} (k_{\infty 0} P_s - 1 - \Gamma T) \right\} \Phi_0^2}{\int\limits_{V_R} \Phi_0^2 \, dV}. \qquad \text{(V, 10)}$$

Es ist über das gesamte Reaktorvolumen V_R zu integrieren. B^2 ist nach Bd. I, Gl. (II/138) die geometrische Neutronenflußkrümmung des ungestörten zylinderförmigen Reaktors. Φ_0 ist die ungestörte Neutronenflußfunktion mit der Krümmung B^2. T ist, wie wir gleich ableiten werden, eine Funktion von Φ_0.

Die ungestörte Funktion für Φ_0 ergibt sich aus:

$$\Delta \Phi_0 + B^2 \Phi_0 = 0. \qquad \text{(V, 11)}$$

Nach Bd. I, Gl. (II/132) ist:

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} = - B^2 \Phi_0. \qquad \text{(V, 12)}$$

Die Lösung heißt:

$$\Phi_0 = A \, J_0 (\alpha r) \cos (\beta z) \quad \text{mit} \quad \alpha^2 + \beta^2 = B^2. \qquad \text{(V, 13)}$$

J_0 ist die Besselfunktion nullter Ordnung.

$\alpha = \frac{2{,}405}{R^*}$. ($R^*$ = effektiver Radius des Reaktors, einschl. Reflektorersparnis.)

$\beta = \frac{\pi}{l^*}$. (l^* = effektive Höhe des Reaktors, einschl. Reflektorersparnis.)

Wir teilen nun den Reaktor in Richtung des durchströmenden Kühlmittels in Zellenbereiche ein. Eine solche Zelle sei z. B. jedem Strömungskanal zugeordnet. Die Zelle habe die Länge l (Reaktorlänge), die Grundfläche F und das Volumen $F \cdot l$. Innerhalb dieser Zelle befindet sich eine Wärmeübergangsfläche f, dann ist f/l die verfügbare Wärmeübergangsfläche pro cm. Durch eine solche Zelle fließe der Kühlstrom j mit der

Wärmekapazität c_p. Die pro cm und sec von dem Brennelement einer Zelle übertragene Wärmeenergie ist:

$$q = \dot{j} c_p \frac{d\vartheta}{dz} \tag{V, 14}$$

ϑ ist die Temperatur des Kühlmittels, gemessen von der Eingangstemperatur ϑ_0 ab.

Andrerseits ist die pro cm und sec übertragene Wärmeenergie bei einer Brennelementtemperatur T und einer Wärmeübergangszahl α:

$$q = \frac{f\alpha}{l}(T - \vartheta). \tag{V, 16}$$

Da der Neutronenfluß von der abgegebenen Wärmeenergie abhängig ist, stellen wir für diese Zelle noch die Beziehung zwischen diesen beiden Größen auf. Die mittlere pro cm³ und sec erzeugte Energie an irgendeiner Stelle der Zelle ist $\Sigma_{sp}\, \Phi\, E_{sp}$, dann ist die pro cm und sec erzeugte Energie:

$$q = F\, \Sigma_{sp}\, \Phi\, E_{sp} = S\, \Phi$$
$$(S = F\, \Sigma_{sp}\, E_{sp}). \tag{V, 16}$$

Die Leistung der gesamten Zelle ist:

$$Q_z = \int_{-\varrho/2}^{+l/2} q\, dz = E_{sp}\, F \int_{-l/2}^{+l/2} \Sigma_{sp}\, \Phi\, dz. \tag{V, 17}$$

Die Gesamtleistung des Reaktors ergibt sich in der üblichen Art zu:

$$Q = E_{sp} \int_0^R r\, dr \int_{-l/2}^{+l/2} dz\, \Sigma_{sp}\, \Phi. \tag{V, 17}$$

Nach Gl. (V, 13) und Gl. (V, 16) ist:

$$q = S \cdot A \cos(\beta z)\, J_0(\alpha\, r). \tag{V, 18}$$

S kann nach den vorausgehenden Erklärungen sowohl von r als auch von z abhängen. Mit Gl. (V, 14) ergibt sich für die Temperaturverteilung des Kühlmediums:

$$\vartheta(z) = A \int_{-l/2}^{+z} dz \cos(\beta z) \frac{S\, J_0(\alpha\, r)}{\dot{j}\, c_p}. \tag{V, 19}$$

Aus Gl. (V, 15) ergibt sich für die Temperaturverteilung an der Brennelementoberfläche:

$$T = A \cos(\beta z) \frac{S J_0(\alpha r)}{\left(\frac{f \cdot \alpha}{l}\right)} + A \int_{-l/2}^{z} \cos(\beta z)\, dz \frac{S J_0(\alpha r)}{j\, c_p}. \qquad (V, 20)$$

Die Gl. (V, 19) zeigt, daß die gewünschte Unabhängigkeit der Austrittstemperatur von der Ortskoordinate r dadurch erreicht werden kann, daß $\frac{S J_0(\alpha r)}{j \cdot c_p} = \text{const}$ eingestellt wird. Wenn $j \cdot c_p$ konstant ist, muß auch $S \cdot J_0(\alpha r)$ konstant sein. Wenn $S = \text{const}$ ist, dann kann durch eine Drosselung des Kühlstroms j bei den meisten Konstruktionen erreicht werden, daß

$$\frac{J_0(\alpha, r)}{j\, c_p} = \text{const}. \qquad (V, 21)$$

Auch, wenn die radiale Abhängigkeit der Leistung wegen der Maßnahmen zur Verflachung der Neutronenflußverteilungskurve eine andere Form als die Funktion $J_0(\alpha, r)$ hat, muß der Kühlstrom j gedrosselt werden. Falls diese Maßnahme unmöglich ist, muß der Brennstoffverteilung und damit die Größe $S = F \Sigma_{sp} E_{sp}$ entsprechend eingestellt werden.

Die noch unbekannte Größe unseres Gleichungssystems ist A, die Funktion für den ungestörten Neutronenfluß. Wir gewinnen sie rein formal, indem wir den für T gewonnenen Wert aus Gl. (V, 20) in Gl. (V, 10) einsetzen. Die Gleichung (V, 10) gibt dann die Beziehung zwischen der Reaktorlänge l, dem Reaktordurchmesser R und dem Maximum des Neutronenflusses A wieder.

In der Praxis wird man jedoch zuerst die zulässige Höchsttemperatur T festlegen und dann A, das Maximum des ungestörten Neutronenflusses, aus Gl. (V, 20) gewinnen.

Wir bestimmen für eine Zelle, die sich im Abstand r von der Mittelachse des Reaktors befindet, mit Hilfe der Gl. (V, 20) den Ort $z_{\max}$ für die maximale Temperatur $T_{\max}$ des betrachteten Brennelements.

Dazu wird die erste Ableitung gleich Null gesetzt:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 = -\beta \cdot A \sin(\beta z) \frac{S \cdot J_0(\alpha r)}{\left(\frac{f \alpha}{l}\right)} + A \cos(\beta z) \frac{S J_0(\alpha r)}{j\, c_p}. \qquad (V, 22)$$

Das Ergebnis ist

$$tg\ (\beta\ z_{\max}) = \frac{\left(\frac{f\alpha}{l}\right)}{\beta\, j\, c_p} = \frac{f \cdot \alpha}{\beta\, c_p\, \beta \cdot l} = s. \qquad \text{(V, 22)}$$

Aus allgemeinen Regeln, die durch Einsetzen leicht geprüft werden können, wird gefolgert:

$$\sin(\beta z_{\max}) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \text{ und } \cos(\beta\ z_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}. \qquad \text{(V, 23)}$$

Nach Gl. (V, 20) ist aber:

$$T_{\max} = \Phi_0 \left\{ l_2 \cos(\beta z_m) + \frac{l_1}{\beta} \sin(\beta z_m) + \frac{l_1}{\beta} \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right) \right\} =$$

$$= \Phi_0\, l_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}} + s \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right) \right\} =$$

$$= l_2 \Phi_0 \left\{ \sqrt{1+s^2} + s \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right) \right\}. \qquad \text{(V, 23)}$$

Mit den Abkürzungen: $\Phi_0 = AS\, J_0\, (\alpha\ r)$; $l_1 = \frac{1}{j\, c_p}$ und $l_2 = \frac{l}{f\alpha}$.

Es folgt für Φ_0:

$$\Phi_0 = \frac{T_{\max}}{l_2\, (\sqrt{1+s^2} + s \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right))}. \qquad \text{(V, 24)}$$

Aus den Gl. (V, 19) und (V, 20) folgt für ϑ und T:

$$\vartheta = T_{max} \frac{s}{(\sqrt{s^2+1} + s \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right))} \left\{ \sin(\beta z) + \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right) \right\} \qquad \text{(V, 25)}$$

und

$$T = \frac{T_{\max}}{(\sqrt{1+s^2} + s \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right))} \left\{ \cos(\beta z) + s \sin(\beta z) + \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right) \right\}. \qquad \text{(V, 26)}$$

Dabei ist $s = \frac{l_1}{\beta\, l_2} = \frac{f\,\alpha}{\beta\, j\, c_p\, l}$ eine Funktion, die wegen $j^{0,8} \sim \alpha$ noch schwach von j anhängt. Für die praktische Anwendung wollen wir annehmen, daß s von j unabhängig ist. Die Gesamtleistung des Reaktors ergibt sich aus:

$$Q = \int j\, c_p\, \vartheta\,(l)\, r\, dr = \frac{F_R}{F}\, j\, c_p\, \vartheta\,(l). \qquad \text{(V, 27)}$$

Dabei ist F_R die gesamte Einströmoberfläche des Reaktors. Aus Gln. (V, 25) und (V, 26) folgt:

$$T - \vartheta = \frac{T_{\max} \cos\,(\beta\,_2)}{\left(\sqrt{s^2+1} + s \sin\left(\frac{\beta\, l}{2}\right)\right)}. \qquad \text{(V, 28)}$$

In unserer Näherung ist also in der Mitte des Reaktors ($z = 0$) die größte Temperaturdifferenz zwischen Kühlmittel und Brennelementoberfläche zu erwarten.

Wir bilden an dieser Stelle die Größe:

$$\frac{T\,(0) - \vartheta\,(0)}{\vartheta\,(0)} = \frac{1}{s \sin\left(\frac{\beta\, l}{2}\right)} \qquad \text{(V, 29)}$$

Da nach Gl. (V, 13) die Größe $\sin\left(\frac{\beta\, l}{2}\right)$ ungefähr gleich 1 sein muß, stellen wir fest, daß s eine Zahl ist, die für gebräuchliche Reaktoren die Größe 2 bis 6 hat.

Anhand von Gl. (V, 27) ermittelt man, daß:

$$2\,\vartheta\,(0) = \vartheta\left(\frac{l}{2}\right). \qquad \text{(V, 30)}$$

Das heißt, daß die mittlere Temperatur des Kühlmittels in der Mitte des Reaktors erreicht wird. Für die Oberflächentemperatur der Brennelemente gilt dasselbe.

Der Verlauf der Kurven für Φ, T und ϑ entlang der Mittelachse des Reaktors, also ($r = 0$), ist in Abb. 15 aufgetragen.

T und ϑ sind in Einheiten von $\dfrac{\left(\sqrt{s^2+1} + s \sin\left(\frac{\beta\, l}{2}\right)\right)}{T_{\max}}$.

Φ in Einheiten von $\dfrac{l_2\left(\sqrt{1+s^2}+s\sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right)}{T_{\max}}$ aufgetragen.

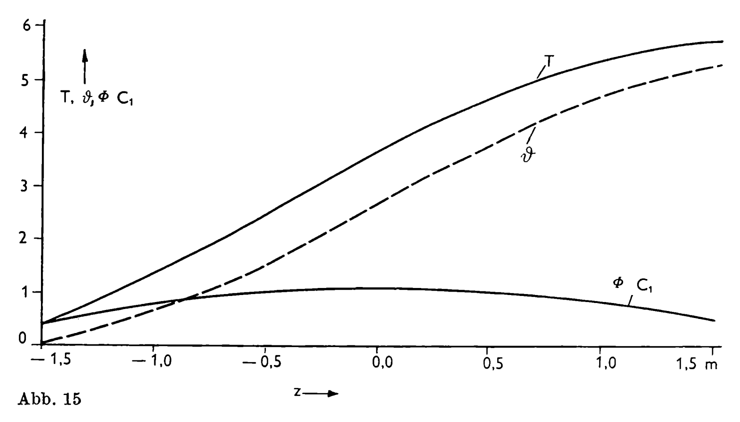


Abb. 15

Die mit elektronischen Rechenmaschinen gefundenen Exakten Werte weichen von den hier gefundenen nur wenig ab. In unseren Näherungsberechnungen wurde die Rückwirkung der Brennelementtemperatur auf die Reaktivitätsbilanz nicht berücksichtigt. Sie wirken sich als eine Verzerrung der Kurve für den Neutronenfluß aus. Wir wollen diesen Effekt noch in unsere Näherungsrechnungen einbeziehen und schreiben daher die Gl. (V, 1) in folgender Form:

$$\frac{1}{\Phi}\,\Delta\Phi + \frac{(\sum_a + \sum_m + \sum_v)_0}{D}\,(K_\infty\, P_s - 1 - \Gamma\, T) = 0. \tag{V, 31}$$

Der erste Summand dieser Gleichung ist die Krümmung des Neutronenflusses. Gleichzeitig ist dieser Summand ein Maß für den Ausfluß an thermischen Neutronen aus dem Reaktor. Wenn dieser groß ist, dann gibt der reaktivitätsmindernde Einfluß der erhöhten Brennelementtemperatur keinen wesentlichen Beitrag zu der Neutronenflußkrümmung. Nur in großen Reaktoren, bei denen der Ausfluß von thermischen Neutronen klein ist, so daß die Reaktivitätsänderung durch den Neutronenfluß in der gleichen Größenordnung liegt wie der Reaktivitätsverlust durch den Temperatureffekt, kann eine merkliche Verzerrung der Kurve für den Neutronenfluß auftreten.

DIE MATHEMATISCHEN GRUNDLAGEN DER REAKTORPHYSIK

In diesen letzten Abschnitten soll das mathematische Rüstzeug zur Behandlung von Reaktorproblemen zusammengestellt werden. Es ist selbstverständlich, daß bei der Fülle dieses Stoffes sowohl auf eine umfassende als auch auf eine im mathematischen Sinne exakte Darstellung verzichtet werden muß. So trägt dieser mathematische Teil mehr den Charakter einer Formelsammlung oder eines Repetitoriums als den eines Lehrbuches. Auch wird hier, im Gegensatz zu den vorhergehenden Abschnitten, das Hauptgewicht nicht auf die physikalischen Vorgänge in Reaktoren, sondern fast ausschließlich auf deren mathematische Darstellung gelegt.

An mathematischen Vorkenntnissen wird das vorausgesetzt, was dem Ingenieur in den Vorlesungen über Mathematik an den Technischen Hochschulen geboten wird. Dazu gehört z. B. Differential- und Integralrechnung, Vektorrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen, Determinanten, komplexe Zahlen usw. Auf diesen Kenntnissen aufbauend, enthalten die folgenden Abschnitte eine Zusammenstellung der mathematischen Wissensgebiete, die in der Reaktorphysik und -technik eine Rolle spielen.

Eine wesentliche Aufgabe dieses Teils soll es sein, dem Reaktoringenieur die mathematischen Voraussetzungen zum Lesen der Fachliteratur zu vermitteln; denn erfahrungsgemäß ist es gerade der Formalismus, der dem Ingenieur, der im allgemeinen nicht daran gewöhnt ist, das Studium von Fachbüchern und -zeitschriften sehr erschwert.

VI. Vektoranalysis

1. *Vektoren und Matrizen*

Ein Vektor ist eine Größe, die sich von den skalaren Größen dadurch unterscheidet, daß man zu ihrer eindeutigen Festlegung außer ihrem Betrag noch eine Richtung angeben muß. Wir kennzeichnen die Vektoren durch kleine deutsche Buchstaben und schreiben z. B.:

$$\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}| \cdot \mathfrak{a}_0 = a \cdot \mathfrak{a}_0, \qquad \text{(VI, 1)}$$

worin $|\mathfrak{a}|$ oder a der Betrag des Vektors $\mathfrak{a}$ ist und $\mathfrak{a}_0$ der Einheitsvektor zu $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}_0$ hat den Betrag eins und die gleiche Richtung wie $\mathfrak{a}$. Vektoren kann man nach den gewöhnlichen Rechenregeln addieren und subtrahieren,

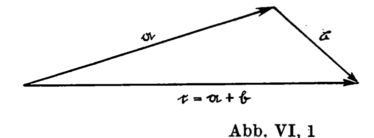


Abb. VI, 1

wobei die geometrische Bedeutung dieser Rechenoperationen aus der Abb. VI, 1 hervorgeht. Es gilt das kommutative, das distributive Gesetz usw.

Bei der Multiplikation von Vektoren gibt es zwei Arten:

Das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist definiert als das Produkt der Beträge von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, multipliziert mit dem Kosinus des von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eingeschlossenen Winkels:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}). \qquad \text{(VI, 2)}$$

Das innere Produkt zweier aufeinander senkrecht stehender Vektoren ist gleich null, das zweier paralleler Vektoren gleich dem Produkt ihrer Beträge.

Während das innere Produkt eine skalare Größe ist, ist das äußere Produkt ein Vektor, definiert durch

$$\mathfrak{c} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}_0. \qquad \text{(VI, 3)}$$

$\mathfrak{c}$ steht auf beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ senkrecht und bildet in der Reihenfolge $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ eine Rechtsschraube. Sein Betrag ist gleich dem Produkt der Beträge von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, multipliziert mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels. Der Betrag von $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ ist also gleich dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms. $\mathfrak{c}_0$ ist der Einheitsvektor zu $\mathfrak{c}$.

Während das innere Produkt sich bei Vertauschung der Faktoren nicht ändert, ändert das äußere Produkt dabei sein Vorzeichen. Es ist also

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = -[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]. \qquad \text{(VI, 4)}$$

Das distributive Gesetz gilt bei der Vektormultiplikation im allgemeinen nicht. So ist z. B. $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\mathfrak{c}$ ein Vektor, dessen Betrag $|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cdot |\mathfrak{c}|$ und dessen Richtung die von $\mathfrak{c}$ ist, während $(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})\mathfrak{b}$ den Betrag $|\mathfrak{a}|\,|\mathfrak{c}| \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})\,|\mathfrak{b}|$ und die Richtung von $\mathfrak{b}$ hat. Auch eine Division von Vektoren ist im allgemeinen nicht möglich, da der inverse Prozeß zur Multiplikation nicht eindeutig ist. (Lediglich in der Vektor- und Tensoranalysis ist es manchmal zweckmäßig, formal eine Division zu definieren.)

Im allgemeinen werden Vektoren in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Die Koordinatenrichtungen seien durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3 \ldots \mathfrak{e}_n$ gegeben. Die Koordinaten a_1. $a_2 \ldots a_n$ eines

Vektors $\mathfrak{a}$ sind dann die Projektionen von $\mathfrak{a}$ auf die jeweiligen Koordinatenrichtungen. Demnach kann man nach dem Gesetz der Vektoraddition schreiben:

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 --- + a_n \mathfrak{e}_n \qquad \text{(VI, 5)}$$

mit

$$a_1 = |\mathfrak{e}| \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_1);\, a_2 = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_2) --- a_n = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_n). \qquad \text{(VI, 6)}$$

Da die $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 --- \mathfrak{e}_n$ Einheitsvektoren sind, ist nach der Gl. (VI, 2)

$$a_1 = (\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_1);\, a_2 = (\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_2) --- a_n = (\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_n). \qquad \text{(VI, 7)}$$

Aus den Gln. (VI, 5 und 7) erhält man für den Vektor $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, \mathfrak{e}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_\nu)\, \mathfrak{e}_\nu \text{ mit } a_\nu = (\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_\nu). \qquad \text{(VI, 8)}$$

Zwei Vektoren sind einander gleich, wenn sie in allen zu ihrer vollständigen Festlegung notwendigen Koordinaten, also in allen Produkten ($\mathfrak{a}$ $\mathfrak{e}_n$), übereinstimmen.

Das innere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wird in der Koordinatenschreibweise dargestellt:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a_1\, b_1\, (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1) + a_1\, b_2\, (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) -- + a_2\, b_1 (\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_1) + + a_2\, b_2\, (\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_2) -- \qquad \text{(VI, 9)}$$

worin aber, da die $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{e}_2 -- \mathfrak{e}_n$ zueinander senkrechte Einheitsvektoren sind,

$$(\mathfrak{e}_\nu, \mathfrak{e}_\mu) \begin{cases} = 1 & \text{für } \nu = \mu \\ = 0 & \text{für } \nu \neq \mu \end{cases} \qquad \text{(VI, 10)}$$

ist, so daß

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, b_\nu \qquad \text{(VI, 11)}$$

ist.

Sind im besonderen auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zueinander senkrechte Einheitsvektoren, so ist

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \sum_{\nu=1}^{n} a^2{}_\nu = 1;\, (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \sum_{\nu=1}^{n} b^2{}_\nu = 1 \text{ und } (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu = 0, \qquad \text{(VI, 12)}$$

und wenn wir nicht nur zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, sondern n Vektoren $\mathfrak{f}_1$ $\mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_n$ haben, die alle zueinander senkrechte Einheitsvektoren sind, so gelten die Beziehungen (VI, 12) auch für alle diese neuen Vektoren $\mathfrak{f}_1\, \mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_n$:

$$(\mathfrak{f}_\nu, \mathfrak{f}_\mu) = \begin{cases} = 1 \text{ für } \nu = \mu \\ = 0 \text{ für } \nu \neq \mu \end{cases}. \qquad \text{(VI, 13)}$$

Das sind die gleichen Beziehungen wie in (VI, 10), und die neuen Vektoren $\mathfrak{f}_1\, \mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_n$ sind ebenso zur Kennzeichnung eines Koordinatensystems geeignet wie die Vektoren $\mathfrak{e}_1\, \mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_n$. Man nennt solche Systeme zueinander senkrechter Einheitsvektoren normierte Orthogonalsysteme.

Die beiden Koordinatensysteme $\mathfrak{e}_1\, \mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_n$ und $\mathfrak{f}_1\, \mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_n$ werden im allgemeinen gegeneinander verdreht sein und es entsteht häufig das Problem, einen Vektor $\mathfrak{a}$, der im System $\mathfrak{e}_1\, \mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_n$ die Koordinaten $a_1\, a_2 \ldots a_n$ haben möge, in den Koordinaten $b_1\, b_2 \ldots b_n$ des gedrehten Systems $\mathfrak{f}_1$ $\mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_n$ darzustellen. Zwischen diesen verschiedenartigen Koordinaten besteht eine lineare Beziehung:

$$\begin{aligned} d_{11}a_1 + d_{12}a_2 \ldots + d_{1n}a_n &= b_1, \\ d_{21}a_1 + d_{22}a_2 \ldots + d_{2n}a_n &= b_2, \\ d_{n1}a_1 + d_{n2}a_2 \ldots + d_{nn}a_n &= b_n. \end{aligned} \qquad \text{(VI, 14)}$$

Man kann die Transformation (VI, 14) auch so deuten, daß der Vektor $\mathfrak{a}$ durch eine Drehung in den Vektor $\mathfrak{b}$ im gleichbleibenden Koordinatensystem überführt wird.

Die Transformation (VI, 14) schreibt man zweckmäßigerweise in der Form von Matrizen:

$$\mathfrak{D}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{b}. \qquad \text{(VI, 15)}$$

Darin werden die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als Spaltenmatrizen

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \text{(VI, 16)}$$

und die Transformationsmatrix

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1n} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ d_{n1} & & & & & d_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(VI, 17)}$$

als quadratische Matrix geschrieben. Die Multiplikationsregel der Matrizen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{a}$ folgt aus der Gl. (VI, 14):

$$b_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\mu\nu} a_\nu . \tag{VI, 18}$$

Die Gl. (VI, 15) enthält auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens eine Spaltenmatrix. Häufig faßt man mehrere derartige Gleichungen zusammen, indem man die verschiedenen Spaltenmatrizen nebeneinander schreibt:

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{B}. \tag{VI, 19}$$

Darin hat die Matrix $\mathfrak{D}$ die in der Gl. (VI, 17) angegebene Gestalt. Die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entstehen jeweils durch das Nebeneinandersetzen von Spalten der Art der Gln. (VI, 16), die man dann noch von links nach rechts numeriert:

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2 \,.\;.\, \mathfrak{a}_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . \; . & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & . \; . & & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{VI, 20}$$

$$\mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_2 \,.\;.\, \mathfrak{b}_m) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . \; . & b_{1m} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & . \; . & & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikationsvorschrift für die Matrizen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{a}$ der Gl. (VI, 19) lautet

$$b_{\mu\varrho} = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\mu\nu}\, a_{\nu\varrho} . \tag{VI, 21}$$

$b_{\mu\varrho}$ ist das Element, das in der Matrix $\mathfrak{B}$ in der μ-ten Zeile und der ϱ-ten Spalte steht. Die Multiplikationsvorschrift ist also die gleiche wie für Determinanten.

Man sieht aus diesen Rechenregeln, daß für die Multiplikation von Matrizen im allgemeinen nicht das kommutative Gesetz gilt.

Eine Division von Matrizen ist im Gegensatz zu einer Division von Vektoren möglich; allerdings auch nur dann, wenn die Matrix, deren Kehrwert man bilden will, quadratisch ist, also die gleiche Anzahl Zeilen wie Spalten hat, und ihre Determinante von Null verschieden ist. Zu einem

Vektor, den man ja nach der (Gl. VI, 16) auch als Matrix schreiben kann, läßt sich demnach, wie wir schon feststellten, kein Kehrwert bilden.

Der Kehrwert $\mathfrak{D}^{-1}$ einer quadratischen Matrix $\mathfrak{D}$ ist durch die Gleichung

$$\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{D} = \mathfrak{E} \qquad \text{(VI, 22)}$$

definiert, worin $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ \cdot & 0 & . & & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & . & & \cdot & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(VI, 23)}$$

ist.

Sie enthält ebensoviele Zeilen und Spalten wie $\mathfrak{D}$ und nur in der Hauptdiagonalen von null verschiedene Elemente, die alle gleich eins sind.

Die Matrix $\mathfrak{D}^{-1}$ hat die Form:

$$\mathfrak{D}^{-1} = \frac{1}{|\mathfrak{D}|} \begin{pmatrix} |\mathfrak{D}_{11}| & |\mathfrak{D}_{21}| & \ldots & |\mathfrak{D}_{n1}| \\ |\mathfrak{D}_{12}| & & & \\ \vdots & & & \\ |\mathfrak{D}_{1n}| & \ldots & & |\mathfrak{D}_{nn}| \end{pmatrix}. \qquad \text{(VI, 24)}$$

Durch die einfassenden senkrechten Striche sind die Determinanten gekennzeichnet. So ist $|\mathfrak{D}|$ die Determinante der ganzen Matrix $\mathfrak{D}$ und $|\mathfrak{D}_{\nu\mu}|$ die aus $|\mathfrak{D}|$ gebildete Unterdeterminante zum Element $d_{\nu\mu}$. (Man beachte, daß in der Gl. (VI, 24) das Element $|\mathfrak{D}_{\nu\mu}|$ nicht an der Stelle des Elementes $d_{\nu\mu}$ der Gl. (VI, 17) steht, sondern an dem Platz, der einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen entspricht, also an der Stelle $d_{\mu\nu}$.) Man nennt die Matrix $\mathfrak{D}^{-1}$ die zu $\mathfrak{D}$ inverse oder reziproke Matrix. Als Beispiel wählen wir eine zweidimensionale orthogonale Matrix. Das ist eine Matrix, die durch eine Transformation von der Art der Gl. (VI, 15) ein Orthogonalsystem — in diesem Falle durch eine Drehung — in ein anderes Orthogonalsystem überführt. Der Winkel, um den die beiden Koordinatensysteme gegeneinander gedreht sind, sei α. Dann lautet diese orthogonale Matrix

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad \text{(VI, 25)}$$

Die Determinante $|\mathfrak{D}|$ ist hier gleich eins. Das ist ein Kennzeichen einer orthogonalen Drehungsmatrix. (Bei einer Spiegelung ist $|\mathfrak{D}| = -1$.) Die Unterdeterminante zu d_{11} ist $\cos\alpha$, die zu d_{12} ist $-\sin\alpha$ usw., so daß

$$\mathfrak{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{(VI, 26)}$$

wird.

Die Matrix $\mathfrak{D}^{-1}$ geht hier durch Spiegelung der Elemente an der Hauptdiagonalen aus der Matrix $\mathfrak{D}$ hervor. Es ist also in diesem Falle der orthogonalen Matrix

$$\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{D}' \text{ (nur wenn } \mathfrak{D} \text{ orthogonal!)}, \qquad \text{(VI, 27)}$$

wobei man mit $\mathfrak{D}'$ immer eine Matrix bezeichnet, die durch Spiegelung der Elemente von $\mathfrak{D}$ an der Hauptdiagonalen, also durch die Vertauschung von Zeilen mit Spalten, entsteht. Eine solche Matrix $\mathfrak{D}'$ nennt man die zu $\mathfrak{D}$ transponierte oder auch adjungierte Matrix. Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist stets gleich ihrer Inversen.

Neben den orthogonalen Matrizen spielen die sog. selbstadjungierten oder symmetrischen Matrizen eine große Rolle: Eine selbstadjungierte Matrix geht durch Spiegelung ihrer Elemente in sich selbst über. Es ist also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \text{ (} \mathfrak{A} \text{ selbstadjungiert).} \qquad \text{(VI, 28)}$$

Die Vorschriften für die Produktbildung transponierter und inverser Matrizen sind einander sehr ähnlich. Es ist:

$$\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}' = (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A})' \qquad \text{(VI, 29)}$$

und

$$\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{B}^{-1} = (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A})^{-1}. \qquad \text{(VI, 30)}$$

Also auch

$$\mathfrak{A}' \, \mathfrak{B}' \, \mathfrak{C}' = (\mathfrak{C} \, \mathfrak{B} \, \mathfrak{A})' \qquad \text{(VI, 31)}$$

und

$$\mathfrak{A}^{-1} \, \mathfrak{B}^{-1} \, \mathfrak{C}^{1} = (\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A})^{-1}. \qquad \text{(VI, 32}$$

Es seien noch einige häufig vorkommende Produktregeln für Vektoren angegeben:

$$[\mathfrak{a}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]] = (\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{b} - (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\, \mathfrak{c}, \qquad \text{(VI, 33)}$$

$$([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], [\mathfrak{c}, \mathfrak{d}]) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) \cdot (\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) - (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) \cdot (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}), \qquad \text{(VI, 34)}$$

$$[[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], [\mathfrak{c}, \mathfrak{d}]] = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}) \cdot \mathfrak{c} - (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})\, \mathfrak{d}. \qquad \text{(VI, 35)}$$

Darin sind die drei in Klammern gesetzten Vektoren die aus den je drei Komponenten der Vektoren gebildeten Determinanten, z. B.

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \qquad \text{(VI, 36)}$$

2. *Vektoranalysis*

Vektoren lassen sich unter Beachtung der angegebenen Rechenregeln differenzieren und integrieren. Sind in der Abb. VI, 1 die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ nicht wesentlich voneinander verschieden, so daß $|\mathfrak{b}| \ll |\mathfrak{a}|$ ist, so kann man schreiben

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + d\mathfrak{a}, \qquad \text{(VI, 37)}$$

worin das kleine $\mathfrak{b}$ durch das Differential $d\mathfrak{a}$ ersetzt wurde. Andererseits kann man durch Aneinanderfügen solcher Differentiale $d\mathfrak{a}$ ein Integral bilden. Es wird dann

$$\int_{\mathfrak{a}_1}^{\mathfrak{a}_2} d\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1. \qquad \text{(VI, 38)}$$

Viel wichtiger als diese Integration über reine Vektoren aber ist die über innere Produkte, wobei einer der Faktoren ein vektorielles Differential ist. Unter bestimmten Voraussetzungen gelten nämlich für diese Integrale einige Sätze, durch die eine Rechnung oft sehr vereinfacht werden kann. Namentlich in der Reaktorphysik ist der Gaußsche Satz, in dem als vektorielles Differential ein Flächenelement vorkommt, von Bedeutung. Er soll daher hier abgeleitet werden.

Wir denken uns in einem homogenen Reaktor an irgendeiner Stelle ein Flächenelement der infinitesimalen Größe df. Da einem infinitesimalen Flächenelement stets eine Orientierung im Raum gegeben werden kann, können wir es als Vektor darstellen, und zwar soll dieser Vektor $d\mathfrak{f}$ die Richtung der Flächennormalen und den Betrag df haben. An der Stelle des Flächenelementes df soll die Diffusionsstromdichte $\mathfrak{j}$ herrschen. $\mathfrak{j}$ ist ebenfalls ein Vektor (im Gegensatz zum Neutronenfluß Φ); denn die Neutronen bewegen sich durch die Diffusion im Mittel in einer Vorzugsrichtung. Die Anzahl der je sec durch das Flächenelement $d\mathfrak{f}$ fließenden Neutronen ist nach der Definition von $\mathfrak{j}$ (Abschnitt II, 2) $|\mathfrak{j}| \cdot |d\mathfrak{f}|$*, wenn die Vektoren $\mathfrak{j}$ und $d\mathfrak{f}$ gleichgerichtet sind. Ist aber $\mathfrak{j}$ gegen $d\mathfrak{f}$ um einen Winkel α gedreht, so ist die Anzahl der je sec durch df fließenden Neutronen

$$|j| \cdot |df| \cdot \cos\alpha = (\mathfrak{j}, d\mathfrak{f}). \qquad \text{(VI, 39)}$$

*(Die senkrechten Striche bezeichnen jetzt wieder die Beträge der Vektoren.)

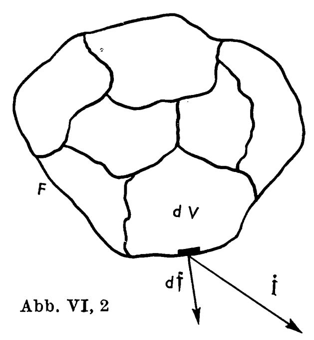


Abb. VI, 2

Wir betrachten nun innerhalb des Reaktors ein beliebig geformtes Volumen V (Abb. VI, 2), das wieder unterteilt ist in sehr viele sehr kleine Teilvolumina dV. Ein solches Teilvolumen greifen wir heraus und stellen, ähnlich wie wir es im Bd I, Abschnitt II, 2 getan hatten, die Bedingung für das Diffusionsgleichgewicht der Neutronen auf.

Dazu integrieren wir die Gl. (VI, 39) über die ganze Oberfläche des kleinen Volumens dV und erhalten so die Anzahl der je sec aus dV abfließenden Neutronen. Im stationären Fall ist diese Anzahl gleich der in dV je sec neuentstehenden Neutronen. Definieren wir jetzt die Anzahl der je sec und je cm³ neu entstehenden Neutronen durch den Ausdruck div $\mathfrak{j}$, so ist

$$dV \cdot \operatorname{div} \mathfrak{j} = \int\limits_{\text{Oberfl. von } dV} (\mathfrak{j}, d\mathfrak{f}) \qquad \text{(VI, 40)}$$

oder

$$\operatorname{div} \mathfrak{j} = \lim_{dV \to 0} \frac{1}{dV} \int\limits_{dV} (\mathfrak{j}, d\mathfrak{f}). \qquad \text{(VI, 41)}$$

Der Ausdruck div $\mathfrak{j}$ ist dabei eine noch festzulegende Ortsfunktion.

Wir wollen nun die Gl. (VI, 40) über das ganze Volumen V integrieren, indem wir die Anteile (VI, 40) auf alle in V enthaltenen Elemente dV anwenden und dann summieren. Bei der Summation ist zu beachten, daß sich alle ($\mathfrak{j}$ $d\mathfrak{f}$) im Inneren von V aufheben, denn konsequenterweise müssen wir den $d\mathfrak{f}$ bei allen Elementen dV einheitliche Richtungen geben. Meistens zählt man die nach außen gerichteten Flächenelemente $d\mathfrak{f}$ bei einem abgeschlossenen Volumen positiv. Auf diese Weise haben die Flächenelemente zweier einander angrenzender Volumina dV entgegengesetzte Richtungen, während der Vektor $\mathfrak{j}$ für beide Elemente die gleiche Richtung hat. Es liefert also bei der Integration über das ganze Volumen auf der rechten Seite der Gl. (VI, 40) nur die nach außen gerichtete Oberfläche von V einen Beitrag, so daß gilt

$$\int\limits_V \operatorname{div} \mathfrak{j} \, dV = \int\limits_F (\mathfrak{j}, d\mathfrak{f}). \qquad \text{(VI, 42)}$$

Das Integral auf der linken Seite ist über das ganze Volumen V, das auf der rechten Seite über dessen ganze Oberfläche F zu erstrecken.

Wir haben damit in der Gl. (VI, 42), dem Gaußschen Satz, eine Formel gewonnen, die es gestattet, ein Volumenintegral in ein Oberflächenintegral zu verwandeln. Allerdings nützt sie uns in dieser Form noch wenig; denn so ist sie eigentlich nichts weiter als die Definition der Größe div $\mathfrak{j}$. Erinnern wir uns aber daran, daß in der Gl. (II, 53) des ersten Bandes die Anzahl der je sec und je cm³ entstehenden Neutronen gegeben war durch

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}, \qquad \text{(VI, 43)}$$

so haben wir den Ausdruck div $\mathfrak{j}$, der ja auch nach der obigen Definition die Anzahl der je sec und je cm³ entstehenden Neutronen ist, für den Fall kartesischer Koordinaten schon bestimmt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{j} = \frac{\partial j_z}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}. \qquad \text{(VI, 44)}$$

j_x, j_y, j_z sind darin die Projektionen des Vektors $\mathfrak{j}$ auf die x-, die y-, die z-Achse, also seine Koordinaten.

Die Größe div $\mathfrak{j}$ heißt die Divergenz des Vektors $\mathfrak{j}$ und ist ein Maß für die Neutronenergiebigkeit. Man nennt sie deshalb auch die Quellstärke. Der Vorteil der Gl. (VI, 42) liegt darin, daß man in den Ausdrücken div $\mathfrak{j}$ und $(\mathfrak{j}, d\mathfrak{f})$ Größen hat, die von der Wahl des Koordinatensystems nicht abhängen, sondern ganz allgemein gelten. Man kann mit Begriffen wie div $\mathfrak{j}$, grad Φ, $\Delta\, \Phi$ rechnen, ohne die entsprechenden umständlichen Ausdrücke in den verschiedenen Koordinatensystemen mitschleppen zu müssen.

Auf ähnliche Weise läßt sich, wie wir es bei den verschiedenen Darstellungen des Δ-Operators im Abschnitt II, 2 des ersten Bandes getan hatten, auch die Divergenz in verschiedenen Koordinatensystemen darstellen.

Es ist in Kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{div} \mathfrak{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}, \qquad \text{(VI, 44)}$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{div} \mathfrak{j} = \frac{\partial j_r}{\partial r} + \frac{j_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z}, \qquad \text{(VI, 45)}$$

in Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{div} \mathfrak{j} = \frac{\partial j_r}{\partial r} + 2\frac{j_r}{r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}(j_\vartheta \sin\vartheta). \quad \text{(VI, 46)}$$

Die Koordinate r ist bei den Zylinderkoordinaten der Fahrstrahl, der auf der Zylinderachse senkrecht steht, und in Kugelordinaten der vom Kugelmittelpunkt ausgehende Fahrstrahl. Der Winkel φ ist in beiden Fällen das Azimut, z die Koordinate in der Zylinderachsenrichtung, und der Winkel ϑ in den Kugelkoordinaten der Polabstand. Die Indizes bei den j bezeichnen jeweils die Projektionen von $\mathfrak{j}$ auf die Koordinatenrichtungen.

Ein ähnlicher Satz wie der Gaußsche ist der Stokessche Satz. Da er in der Reaktortechnik eine geringe Rolle spielt, sei er ohne Ableitung angegeben. Er verwandelt ein Flächenintegral in ein Linienintegral und lautet:

$$\int_F (\operatorname{rot} \mathfrak{b}, d\mathfrak{f}) = \int_S (\mathfrak{b}, d\mathfrak{s}). \quad \text{(VI, 47)}$$

Darin ist $\mathfrak{b}$ ein beliebiger Vektor, F eine beliebig gekrümmte Fläche, die aber im Gegensatz zur Oberfläche des Volumens im Gaußschen Satz nicht geschlossen zu sein braucht. $d\mathfrak{f}$ ist ein auf F liegendes gerichtetes Flächenelement, S der Rand der Fläche F und $d\mathfrak{s}$ ein vektorielles Linienelement von S gemäß der Gl. (VI, 37). Der Ausdruck rot $\mathfrak{b}$ heißt die Rotation des Vektors $\mathfrak{b}$ und ist wieder ein Vektor.

F kann natürlich auch eine geschlossene Fläche sein. Die rechte Seite der Gl. (VI, 47) verschwindet dann. Da aber auf der linken Seite das geschlossene Integral über ein inneres Produkt zweier Vektoren steht, kann man den Gaußschen Satz auf das von F umschlossene Volumen anwenden:

$$\int_F (\operatorname{rot} \mathfrak{b}, d\mathfrak{f}) = \int_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{b}\, d V = 0. \quad \text{(VI, 48)}$$

Das rechte Integral kann über jedes beliebige Volumen V erstreckt werden. Daraus folgt:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{b} \equiv 0. \quad \text{(VI, 49)}$$

Damit haben wir eine wichtige Eigenschaft des Vektors rot $\mathfrak{b}$ kennengelernt: Die Divergenz einer Rotation verschwindet immer. Man sieht daraus, daß nicht jedes beliebige Vektorfeld sich als Rotation eines ande-

ren Vektors beschreiben läßt, was für die Rechnung mancherlei Vorteile hätte. Dazu muß das Feld quellenfrei sein. Die Diffusionsstromdichte $\mathfrak{j}$ z. B. läßt sich nicht als Rotation eines anderen Vektors beschreiben, weil überall im Reaktor Neutronen entstehen bzw. verschwinden.

Auf ganz ähnliche Weise wie die Divergenz eines Vektors läßt sich auch die Rotation für verschiedene Koordinatensysteme ausrechnen. Es ist in Kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{b} = \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\mathfrak{e}_1 + \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\mathfrak{e}_2 + \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\mathfrak{e}_3, \qquad \text{(VI,50)}$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{b} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial j_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial j_\varphi}{\partial z}\right)\vec{r}_0 + \left(\frac{\partial j_r}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial r}\right)\vec{\varphi}_0 +$$
$$+ \left(\frac{\partial (r\, j_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial j_r}{\partial \varphi}\right)\frac{\mathfrak{e}_3}{r}, \qquad \text{(VI, 51)}$$

in Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{b} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial j_\varphi \sin\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial j_\vartheta}{\partial \varphi}\right)\vec{r}_0 + \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial j_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\right.$$
$$\left.\frac{\partial (r\, j_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{\vartheta}_0 + \left(\frac{\partial (r\, j_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial j_r}{\partial \vartheta}\right)\frac{\vec{\varphi}_0}{r}. \qquad \text{(VI, 52)}$$

Darin ist wieder die Indizierung wie in den Gln. (VI, 44–46). Die Größen $\mathfrak{e}_1\ \mathfrak{e}_2\ \mathfrak{e}_3$ bzw. $\vec{r}_0\ \vec{\varphi}_0\ \vec{\vartheta}_0$ sind die Einheitsvektoren in Richtung fortschreitender $x\ y\ z$ bzw. $r\ \varphi$ und ϑ.

Der dritte in der Reaktortechnik neben der Divergenz und der Rotation vorkommende einfache Differentialoperator ist der Gradient.

Um den Begriff des Gradienten zu erklären, betrachten wir im Reaktor eine ortsabhängige Größe, etwa den Neutronenfluß Φ ($\mathfrak{r}$). Der Vektor $\mathfrak{r}$ soll die Ortsabhängigkeit kennzeichnen. Der Zusammenhang zwischen Φ und $\mathfrak{j}$ ist uns bereits aus der Diffusionstheorie bekannt s. Bd. I, Gl. (II, 54).

$$j_x = -D\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad j_y = -D\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad j_z = -D\,\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \qquad \text{(VI, 53)}$$

Diese drei in kartesischen Koordinaten gegebenen Gleichungen faßt man in einer Gleichung

$$\mathfrak{j} = -D \operatorname{grad} \Phi \qquad \text{(VI, 54)}$$

zusammen. Der Vektor grad Φ ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig. Für die drei verschiedenen Koordinatensysteme wird mit den schon bekannten Bezeichnungen

in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathfrak{e}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathfrak{e}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathfrak{e}_3, \qquad \text{(VI, 55)}$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathfrak{e}_3, \qquad \text{(VI, 56)}$$

in Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \vec{\vartheta}_0 + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_0. \qquad \text{(VI, 57)}$$

Der Gradient einer Funktion ist ein Maß für die Stärke ihrer Ortsveränderlichkeit. Man nennt ihn auch häufig das Funktionsgefälle.

Zwischen der Rotation und dem Gradient besteht eine ähnliche Beziehung wie zwischen der Divergenz und der Rotation. Durch die Kombination der Gln. (VI, 55) und (VI, 50) erhält man für kartesische Koordinaten die Beziehung, die aber ganz allgemein gilt.

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi \equiv 0.$$

Da nicht für jedes beliebige Vektorfeld die Rotation verschwindet, ist auch nicht jeder Vektor als Gradient einer Ortsfunktion Φ darstellbar. Die Diffusionsstromdichte $\mathfrak{j}$ ist der Gradient des Neutronenflusses Φ. Die Rotation von $\mathfrak{j}$ verschwindet also:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{j} = 0. \qquad \text{(VI, 58)}$$

Als letzter und wichtigster Differentialoperator ist noch der uns schon bekannte Δ-Operator mit den Methoden der Vektoranalysis zu beschreiben. Der Δ-Operator ist definiert als die Divergenz eines Gradienten. Es ist also

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi, \qquad \text{(VI, 59)}$$

wobei für diese Schreibweise wieder die Bedingung (VI, 58) erfüllt sein muß.

Der Gaußsche Satz, Gl. (VI, 42), lautet dann:

$$\int_V \triangle \Phi \, dV = \int_F (\text{grad}\, \Phi, d\mathfrak{f}). \tag{VI, 60}$$

Die Gl. (VI, 60) bietet gegenüber der Gl. (VI, 42) den Vorteil, daß man als Variable nicht den Vektor $\mathfrak{j}$, der mit seinen drei Komponenten unbequem in der Handhabung ist, verwenden muß, sondern mit dem einfachen Skalar Φ rechnen kann. Dieser Vorteil wurde uns gewissermaßen durch die Nebenbedingung Gl. (VI, 58) geschenkt, oder, was das gleiche bedeutet, durch die Gl. (VI, 54).

Das Volumen V in der Gl. (VI, 60) kann beliebig gewählt werden. Wählen wir, wie wir es im Abschnitt II, 2 des ersten Bandes immer getan haben, dafür einen cm^3, so steht wieder auf der linken Seite die Anzahl der je sec in diesem cm^3 erzeugten Überschußneutronen, auf der rechten Seite die durch die Oberfläche des cm^3 ausfließenden Neutronen. Im stationären Falle gilt also die Gl. (VI, 60). Ist V das Volumen des ganzen Reaktorcores, so steht links in der Gl. (VI, 60) die Anzahl der im ganzen Core erzeugten Überschußneutronen, rechts die Anzahl der durch die Wände des Cores ausfließenden Neutronen. Man sieht also, daß es sich bei den hier abgeleiteten Formeln um die Beschreibung der aus dem Abschnitt II, 2 bekannten Dinge handelt. Allerdings haben die hier abgeleiteten Formeln den Vorzug der Allgemeingültigkeit bezüglich der Koordinatensysteme.

Der Δ-Operator schreibt sich in den drei Koordinatensystemen, in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \tag{VI, 61}$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \tag{VI, 62}$$

in Kugelkoordinaten:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi}. \tag{VI, 63}$$

Ist keine Winkelabhängigkeit von Φ in Zylinder- und Kugelkoordinaten gegeben, so gehen die Gl.n (VI, 62 und 63) in die bereits abgeleiteten Gl.n (II, 31 und II, 30) über.

Bevor wir in der Beschreibung der Integralsätze fortfahren, wollen wir einige Rechenregeln für Differentialoperatoren angeben. Man gewinnt sie, indem man ganz formal, ähnlich wie wir es in der Gl. (II, 25) beim Δ-Operator getan hatten, einen vektoriellen Operator ∇ (sprich: Nabla) einführt. In kartesischen Koordinaten ist er z. B.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{e}_3. \tag{VI, 64}$$

Mit Hilfe dieses Symbols kann man den Gradienten einer Größe Φ als das gewöhnliche Produkt des ∇-Operators mit dem Skalar Φ auffassen:

$$\nabla \cdot \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathfrak{e}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathfrak{e}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathfrak{e}_3. \tag{VI, 65}$$

Die Divergenz eines Vektors $\mathfrak{a}$ gewinnt man durch Bildung des inneren Produktes von ∇ und $\mathfrak{a}$:

$$(\nabla, \mathfrak{a}) = \operatorname{div} \mathfrak{a} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{e}_3 \right) (a_x \mathfrak{e}_1 + a_y \mathfrak{e}_2 + a_z \mathfrak{e}_3) \right] = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{VI, 66}$$

die Rotation durch Bildung des äußeren Produktes:

$$[\nabla, \mathfrak{a}] = \operatorname{rot} \mathfrak{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathfrak{e}_1 + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathfrak{e}_2 + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathfrak{e}_3. \tag{VI, 67}$$

Der ∇-Operator ist wieder koordinatenunabhängig. Bei seiner Anwendung auf Produkte von Skalaren oder Vektoren hat man einige Regeln zu beachten: Der ∇-Operator ist ein Differentialoperator. Es gelten also bei seiner Anwendung auf Produkte die Produktregeln der Differentialrechnung. Dabei darf man ihn nicht vertauschen mit dem Faktor, auf den er angewendet werden soll. Außerdem muß man natürlich die Nichtvertauschbarkeit bei manchen Vektoroperationen überhaupt beachten.

Folgende Formeln gewinnt man z. B. durch die Verwendung des ∇-Operators:

$$(\nabla, \Phi\,\mathfrak{a}) = \Phi \cdot (\nabla, \mathfrak{a}) + (\mathfrak{a}, \nabla \cdot \Phi) \qquad \text{(VI, 68)}$$

$$[\nabla, \Phi\,\mathfrak{a}] = \Phi \cdot [\nabla, \mathfrak{a}] - [\mathfrak{a}, \nabla \cdot \Phi] \qquad \text{(VI, 69)}$$

$$(\nabla, \Phi' \cdot \nabla \cdot \Phi) = \Phi' \Delta \Phi + (\nabla \cdot \Phi) \cdot (\nabla \cdot \Phi'). \qquad \text{(VI, 70)}$$

Darin bedeuten runde Klammern, in denen die Faktoren durch ein Komma getrennt sind, innere Produkte, eckige Klammern äußere Produkte und ein Punkt zwischen den Faktoren gewöhnliche Multiplikation.

3. Wir kehren nun zurück zum Gaußschen Satz und wollen noch eine sehr häufig verwendete Erweiterung desselben in der Form des Greenschen Satzes besprechen.

Wendet man den Gaußschen Satz, Gl. (VI, 42), nicht auf den Vektor $-\operatorname{grad} \Phi$ an, sondern auf ein Produkt aus einem Skalar Φ' mit dem Vektor grad Φ, so erhält man

$$\int_V \operatorname{div} (\Phi' \cdot \operatorname{grad} \Phi)\, dV = \int_F \Phi' (\operatorname{grad} \Phi, d\mathfrak{f}). \qquad \text{(VI, 71)}$$

Der Integrand auf der linken Seite dieser Gleichung lautet in der Nabla-Schreibweise $(\nabla, \Phi' \cdot \nabla \cdot \Phi)$. Dieses Produkt haben wir schon aufgespalten in der Gl. (VI, 70), die ausgeschrieben lautet:

$$\operatorname{div} (\Phi' \operatorname{grad} \Phi) = \Phi' \Delta \Phi + (\operatorname{grad} \Phi, \operatorname{grad} \Phi'). \qquad \text{(VI, 72)}$$

Setzen wir diese Gl. (VI, 72) in (VI, 71) ein, so erhalten wir die erste Form des Greenschen Satzes:

$$\int_V \Phi' \Delta \Phi\, dV + \int_V (\operatorname{grad} \Phi \operatorname{grad} \Phi')\, dV = \int_F \Phi' \cdot (\operatorname{grad} \Phi, d\mathfrak{f}). \qquad \text{(VI, 73)}$$

Häufiger findet man die symmetrische Form, die man dadurch gewinnt, daß man die Gl. (VI, 73) noch einmal aufschreibt, aber mit vertauschten Φ und Φ':

$$\int_V \Phi \Delta \Phi'\, dV + \int_V (\operatorname{grad} \Phi' \operatorname{grad} \Phi)\, dV = \int_F \Phi \cdot (\operatorname{grad} \Phi'\, d\mathfrak{f})$$

und die beiden Gleichungen voneinander abzieht:

$$\int_V (\Phi \Delta \Phi' - \Phi' \Delta \Phi)\, dV = \int_F ((\Phi \operatorname{grad} \Phi' - \Phi' \operatorname{grad} \Phi), d\mathfrak{f}). \qquad \text{(VI, 74)}$$

In dieser Form hatten wir den Greenschen Satz schon einmal im Bd. I, Abschnitt III verwendet. Dort allerdings war verlangt worden, daß Φ und auch Φ' am Rande des Reaktorcores verschwinden, so daß die rechte Seite von (VI, 74) gleich null wird. Φ' war die durch Unregelmäßigkeiten im Reaktorcore gestörte Flußfunktion und Φ die ungestörte Flußverteilung.

Aus der großen Zahl der Anwendungsmöglichkeiten der Greenschen Formeln sei hier nur eine erwähnt. Sie ergibt sich aus einer Art Störungsrechnung.

Wir gehen aus von der Diffusionsgleichung der thermischen Neutronen

$$\Delta \Phi + B^2 \Phi = 0. \qquad \text{(VI, 75)}$$

Der Krümmungsfaktor soll jedoch, ähnlich wie im Abschnitt III, zwar im wesentlichen im ganzen Reaktor konstant sein, aber doch etwas vom Ort abhängen, so daß wir schreiben können:

$$B^2 = B_0^2 + \frac{\varepsilon(\mathfrak{r})}{D}. \qquad \text{(VI, 76)}$$

Daß wir die Diffusionskonstante D mit hineingenommen haben, hat den formalen Grund, daß das im folgenden auftretende Produkt $\varepsilon\,\Phi_0$ eine Quellstärke mit der Dimension Neutronen je sec und je cm³ sein soll.

B_0 ist der mittlere konstante Krümmungsfaktor und $\varepsilon(\mathfrak{r})/D$ die kleine ortsabhängige Abweichung davon.

Den Fluß Φ schreiben wir ebenfalls als Summe des normalen Flusses Φ_0, der der Gleichung

$$\Delta \Phi_0 + B_0^2 \Phi_0 = 0 \qquad \text{(VI, 77)}$$

entspricht, und einer kleinen Abweichung $\varphi(\mathfrak{r})$ von Φ_0:

$$\Phi = \Phi_0 + \varphi(\mathfrak{r}). \qquad \text{(VI, 78)}$$

Mit diesen Definitionen wird aus der Gl. (VI, 75):

$$\Delta \Phi_0 + \Delta \varphi + B_0^2 \Phi_0 + B_0^2 \varphi + \frac{\varepsilon}{D} \Phi_0 + \frac{\varepsilon}{D} \varphi = 0. \qquad \text{(VI, 79)}$$

Der erste und der dritte Summand darin heben sich wegen der Gl. (VI, 77) auf. Den letzten Summanden vernachlässigen wir als Produkt zweier kleiner Größen, so daß für den Störungsanteil des Flusses

$$\Delta \varphi + B_0^2 \varphi = -\frac{\varepsilon(\mathfrak{r})}{D} \Phi_0 \qquad \text{(VI, 80)}$$

übrigbleibt. Das ist eine Diffusionsgleichung, die sich von den bisher behandelten dadurch unterscheidet, daß auf der rechten Seite eine Funktion des Ortes erscheint.

Auf diese Differentialgleichung (VI, 80) wenden wir jetzt den Greenschen Satz an, müssen dazu allerdings zuvor noch einige Festsetzungen treffen:

Die Funktion φ ($\mathfrak{r}$), die wir im weiteren an die Stelle der Funktion Φ im Greenschen Satz Gl. (VI, 74) setzen wollen, muß am Rande des Cores ebenso wie Φ_0 verschwinden:

$$\varphi_{\text{Rand}}(\mathfrak{r}) = 0. \tag{VI, 81}$$

Fernerhin müssen wir die Funktion Φ' ($\mathfrak{r}$) in der Gl. (VI, 74), über die wir noch frei verfügen können, festlegen. Wir verlangen von ihr, daß sie der Differentialgleichung

$$\Delta \Phi' + B_0^2 \Phi' = 0 \tag{VI, 82}$$

genügt. Außerdem soll sie die Lösung der Gl. (VI, 82) in Kugelkoordinaten sein, d. h.

$$\Phi'(\mathfrak{r}) = \frac{e^{i B_0 |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0|\,*)}}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0|}. \tag{VI, 83}$$

Darin bezeichnet $\mathfrak{r}_0$ einen festen Punkt innerhalb des Reaktors. $|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|$ ist der Abstand von diesem Punkt $\mathfrak{r}_0$ zu einem variablen Punkt $\mathfrak{r}$. Φ' beschreibt eine vom Punkt $\mathfrak{r}_0$ ausstrahlende Neutronendiffusionswelle, die aber hier keine Realität besitzt, sondern nur die Aufgabe einer Hilfsfunktion zu erfüllen hat.

Wenden wir auf die Gln. (VI, 80 und VI, 82) den Greenschen Satz, Gl. (VI, 74) an, so erhalten wir auf der linken Seite mit der Gl. (VI, 83):

$$\int_V -\frac{\varepsilon(\mathfrak{r})}{D}\,\Phi'\,\Phi_0\,dV = -\int_V \frac{\varepsilon(\mathfrak{r})}{D}\,\Phi_0\,\frac{e^{i B_0 |\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}\,dV, \tag{VI, 84}$$

wobei wir als Volumen V das des Reaktorcores nehmen wollen.

Bei der Auswertung der rechten Seite der Gl. (VI, 74) ist zu bedenken, daß die Funktion Φ' an der Stelle $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$ eine Singularität erster Ordnung hat. Wir schließen deshalb die nahe Umgebung dieses Punktes bei der Volumenintegration aus. Auf das Volumenintegral hat das Ausschließen der Umgebung von $\mathfrak{r}_0$ keinen Einfluß, wohl aber auf das Oberflächenintegral der Gl. (VI, 74). Das Oberflächenintegral ist über die ganze das Volumen V begrenzende Oberfläche zu erstrecken, also auch auf die

*) Wir benutzen hier, wie in der Elektrotechnik üblich, die komplexe Schreibweise. Gemeint ist nur der Realteil der komplexen Größen.

kugelförmige Oberfläche des ausgeschlossenen Bereiches. Wegen der Singularität erster Ordnung von Φ' liefert vom Oberflächenintegral nur der erste Summand einen Beitrag. Er ist, wenn man den Bereich um $\mathfrak{r}_0$ zusammenschrumpfen läßt:

$$4\,\pi\,\varphi\,(\mathfrak{r}_0). \tag{VI, 85}$$

Die Integration über die äußere Oberfläche F des Reaktors liefert – jetzt verschwindet der erste Summand, weil wir auf dem Rand des Cores $\varphi = 0$ gesetzt haben – mit der Gl. (VI, 83):

$$\int\limits_F \Phi'\,(\operatorname{grad}\varphi,\, d\mathfrak{f}) = \int\limits_F \frac{e^{\,i\,B_0\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}\,(\operatorname{grad}\varphi,\, d\mathfrak{f}). \tag{VI, 86}$$

Durch Kombination der Gln. (VI, 74, 84, 85, 86) erhalten wir schließlich:

$$\varphi\,(\mathfrak{r}_0) = -\frac{1}{4\,\pi}\int\limits_V \frac{\varepsilon\,(\mathfrak{r})}{D}\,\Phi_0\,\frac{e^{\,i\,B_0\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}\,dV + \frac{1}{4\,\pi}\int\limits_F \frac{e^{\,i\,B_0\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}\,(\operatorname{grad}\varphi,\, d\mathfrak{f}). \tag{VI, 87}$$

Damit ist es uns durch die Einführung der Hilfsfunktion Gl. (VI, 83) gelungen, den störenden Anteil $\varphi\,(\mathfrak{r}_0)$ des Neutronenflusses an jeder beliebigen Stelle $\mathfrak{r}_0$ im Reaktor in der Form von Integralen darzustellen. Betrachten wir die Ausgangsgleichung Gl. (VI, 80) unserer Rechnung und das Ergebnis Gl. (VI 87), so zeigt sich der folgende anschauliche Sachverhalt: Die Differentialgleichung (VI, 80) enthält einen Anteil $\Delta\,\varphi$, der der Diffusion der Neutronen entspricht, einen zweiten Anteil $B_0^2\,\varphi$, der durch die Produktion abzüglich der Absorption im Inneren des Cores entsteht und einen dritten, der eine zusätzliche durch die Störung von B_0^2 verursachte Neutronenproduktion $\frac{\varepsilon\,(\mathfrak{r})}{D}\,\Phi_0\,(\mathfrak{r})$ beschreibt. In der Gl. (VI, 87) trägt diesem letzten Anteil das Volumenintegral Rechnung. Der Störfluß φ setzt sich darin zusammen aus den Beiträgen aller in V enthaltenen Volumenelemente dV. Greifen wir eines davon heraus, so liefert es den Beitrag zu $\varphi\,(\mathfrak{r}_0)$:

$$d\,\varphi\,(\mathfrak{r}_0) = -\frac{1}{4\,\pi\,D}\,\varepsilon\,(\mathfrak{r})\,\Phi_0\,(\mathfrak{r})\,\frac{e^{\,i\,B_0\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}\,dV. \tag{VI, 88}$$

Um uns diese Gleichung anschaulich zu machen, überlegen wir, welchen Beitrag in einem Reaktor eine nahezu punktförmige Neutronenquelle der Quellergiebigkeit $\varepsilon \Phi_0 \, dV$ zum Neutronenfluß im Abstand r von der Quelle liefert. Das Material des Reaktors sei wieder durch den Krümmungsfaktor B_0 gekennzeichnet, so daß die Diffussionsgleichung die Form der Gl. (VI, 77) hat. Die Lösung in Kugelkoordinaten lautet:

$$\varphi = A \frac{e^{i B_0 r}}{r}. \tag{VI, 89}$$

Sie besitzt am Ort der Quelle $r = 0$ eine Singularität. A ist eine Konstante, die von der Quellergiebigkeit abhängt und noch zu bestimmen ist. Im Volumen dV bei $r = 0$ werden je sec $\varepsilon \Phi_0 \, dV$ Neutronen produziert, die alle den Quellbereich verlassen. Es wird also das Oberflächenintegral über diesen Bereich dV:

$$\varepsilon \Phi_0 \, dV = \oint (\mathfrak{j}_q, d\mathfrak{f}) \approx 4 \pi r_q^2 j_q, \tag{VI, 90}$$

worin j_q die Diffusionsstromdichte des Quellflusses und $\mathfrak{r}_q$ der Radius der näherungsweise kugelförmig gedachten Quelle ist.

Andererseits ergibt sich die Quellflußdichte bei $\mathfrak{r}_q$ aus der Gl. (VI, 89) näherungsweise zu:

$$j_q = - D \frac{\partial \varphi}{\partial r} = DA \frac{1}{r_q^2}, \tag{VI, 91}$$

so daß die Konstante A

$$A = \frac{1}{4 \pi D} \varepsilon \Phi_0 \, dV$$

ist.

Damit wird die Gl. (VI, 89), wenn wir noch entsprechend der differentiellen Quellstärke $\varepsilon \Phi_0 \, dV$ für φ das Differential $d\varphi$ schreiben:

$$d \varphi (r) = \frac{1}{4 \pi D} \varepsilon \Phi_0 \frac{e^{i B_0 r}}{r} dV. \tag{VI, 92}$$

Die beiden Gln. (VI, 92 und VI, 88) stimmen, wenn man den Abstand zwischen der Quelle und dem Punkt, an dem das $d\varphi$ gemessen wird, wieder $r = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0|$ setzt, überein. Der Unterschied im Vorzeichen rührt davon

her, daß in der Gl. (VI,80) das Störglied $\frac{\varepsilon}{D}\,\Phi_0$ eine Neutronensenke war, während wir hier der Anschaulichkeit halber eine Quelle angenommen haben.

Der Inhalt des ersten Teils der Gl. (VI, 87) ist damit erklärt. Das Volumenintegral liefert als Beitrag zum Störfluß φ $(\mathfrak{r}_0)$ an der Stelle $\mathfrak{r}_0$ die Summe aus allen im Volumen V enthaltenen Quellen $\varepsilon\,\Phi_0\,dV$.

Das Oberflächenintegral in der Gl. (VI, 87) hat eine ähnliche Bedeutung. Dieser Beitrag zum Störfluß φ ist so zu verstehen, daß man das Aus- bzw. Einfließen der Neutronen durch die Wände des Cores so beschreiben kann, als ob außerhalb des Cores eine Neutronensenke bzw. -quelle angebracht wäre. Die Diffusion der Neutronen von einer solchen virtuellen Quelle oder Senke durch die Coreoberfläche beschreibt das Flächenintegral in der Gl. (VI, 87). Wir werden auf solche Flächenquellen gleich noch einmal zurückkommen.

Bei der Störungsrechnung wird der zuletzt genannte Randeinfluß meistens klein sein bzw. klein gemacht werden, so daß die Störfunktion im wesentlichen die Form

$$\varphi(\mathfrak{r}_0) = -\int\limits_V \frac{\varepsilon\,\Phi_0}{4\,\pi\,D}\,\frac{e^{\,i\,B_0\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}\,dV \qquad \text{(VI, 93)}$$

annimmt.

Die Anwendung dieses Integrals ist natürlich nicht auf die hier beschriebene Störungsrechnung beschränkt, sondern tritt immer dann auf, wenn man die Neutronenflußverteilung in einem Material berechnen will, in dem eine bestimmte ortsabhängige Quellstärke ϱ $(\mathfrak{r})$ vorgegeben ist und außerdem eine Neutronenproduktion oder auch -absorption, die proportional ist dem Neutronenfluß Φ. Die Diffusionsgleichung für einen solchen Vorgang ist:

$$\Delta\,\Phi + B^2\,\Phi = \frac{\varrho\,(\mathfrak{r})}{D}. \qquad \text{(VI, 94)}$$

Darin ist der Krümmungsfaktor als Materialeigenschaft bei einer dem Fluß Φ proportionalen Neutronenproduktion reell, bei einer Absorption imaginär. Der erste Fall ist z. B. im Corebereich, der zweite im Reflektor gegeben.

Die Lösung der Gl. (VI, 94) ist entsprechend der Gl. (VI, 93):

$$\Phi\,(\mathfrak{r}_0) = \int\limits_V \frac{\varrho}{4\,\pi\,D}\,\frac{e^{\,i\,B_0\,|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}\,dV \qquad \text{(VI, 95)}$$

für reelles B_0 und

$$\Phi(\mathfrak{r}_0) = \int \frac{\varrho}{4\pi D} \frac{e^{-\varkappa|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|} dV \tag{VI, 96}$$

für imaginäres B_0 mit $-\varkappa = iB_0$. Die Größe

$$\frac{1}{4\pi D} \frac{e^{-\varkappa|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|} \tag{VI, 97}$$

nennt man den *Kern* des Volumenintegrals (englisch: kernel). Der Kern hängt von den Materialeigenschaften ab. Er ist nach der Gl. (VI, 97) der Neutronenfluß, den eine Punktquelle der Stärke 1 Neutron je sec im Abstand $|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|$ von dieser Punktquelle induziert.

Wir wenden uns jetzt der noch zurückgestellten Frage einer flächenhaften Neutronenquelle zu.

Das mit der Greenschen Formel behandelte Störungsproblem führte uns auf die Differentialgleichung (VI, 94), in der eine über ein Volumen V verteilte Quellstärke gegeben war. Auf ähnliche Weise läßt sich auch das Problem einer flächenhaften Neutronenquelle behandeln. Wir benutzen dazu wieder die Greensche Formel, wählen aber den Raum, in dem wir den Neutronenfluß berechnen wollen, so groß, daß keine Randstörungen auftreten. Der Krümmungsfaktor des Materials sei B.

In einer Wand des Raumes sei ein Fenster des Flächeninhaltes F' und innerhalb dieses Fensters eine die ganze Fensteröffnung F' ausfüllende flächenhafte Neutronenquelle angebracht.

Wieder wollen wir den Neutronenfluß $\Phi(\mathfrak{r}_0)$ an einem Punkte $\mathfrak{r}_0$ innerhalb des Raumes ausrechnen, und wieder bedienen wir uns dazu einer Hilfsfunktion, der Greenschen Funktion. Die Greensche Funktion G habe die folgenden Eigenschaften

$$\Delta G + B^2 G = 0, \tag{VI, 98}$$

$$G_{\text{Rand}} = 0, \tag{VI, 99}$$

$$\lim_{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0| \to 0} G = \frac{e^{iB|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}. \tag{VI, 100}$$

Die Greensche Funktion soll also der gleichen Differentialgleichung genügen, wie die Diffusionsgleichung der Neutronen im betrachteten Raumbereich V:

$$\Delta \Phi + B^2 \Phi = O. \tag{VI, 101}$$

Die unmittelbare Folge davon ist, daß in der Greenschen Formel Gl. (VI, 74) die linke Seite verschwindet, wenn wir jetzt Φ' durch G ersetzen.

Zweitens soll die Greensche Funktion auf der ganzen Oberfläche von V, also auch im Bereich des Fensters verschwinden. Damit fällt in dem Oberflächenintegral der Gl. (VI, 74) der zweite Summand fort.

Drittens forderten wir, daß die Greensche Funktion in der Nähe des Punktes $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$ sich wie die Funktion $\Phi'(\mathfrak{r})$ in der Gl. (VI, 83) verhält. Im Punkte $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$ hat also die Greensche Funktion wieder eine Singularität, und wir müssen die nahe Umgebung von $\mathfrak{r}_0$ von der Integration ausschließen. Die Oberflächenintegration um diesen ausgeschlossenen Bereich liefert wie in der Gl. (VI, 85)

$$4\pi \Phi(\mathfrak{r}_0). \tag{VI, 102}$$

Schließlich müssen wir noch von der Greenschen Funktion verlangen, daß ihr Gradient mit der Entfernung genügend rasch kleiner wird, so daß die Integration über die Randflächen, die nicht das Fenster enthalten, keinen Beitrag zum Fluß $\Phi(\mathfrak{r}_0)$ liefern. Die einzige Fläche, die dann außer der Oberfläche des ausgeschlossenen Bereiches noch zu berücksichtigen ist, ist die Fläche mit dem Fenster, so daß wir im ganzen erhalten:

$$4\pi \Phi(\mathfrak{r}_0) = -\int_F \Phi(\mathfrak{r}) (\operatorname{grad} G, d\mathfrak{f}). \tag{VI, 103}$$

Das Integral kann über die ganze das Fenster enthaltende Fläche erstreckt werden, obwohl praktisch nur das Fenster selber mit der darin angebrachten Flächenquelle einen Beitrag liefert. Auf dem übrigen Bereich F, nehmen wir an, verschwindet Φ.

Nun müssen wir noch die Greensche Funktion, deren Gestalt allein durch die geometrische Eigenart der Fläche F gegeben ist, für die Ebene ausrechnen. Der Fall der Ebene ist eigentlich der einzige, in dem die Anwendung der Greenschen Funktion in diesem Zusammenhange sinnvoll ist; denn schon, wenn F die einfache Form einer Kugelschale hat, führt die Greensche Funktion auf unbequeme Näherungsformeln.

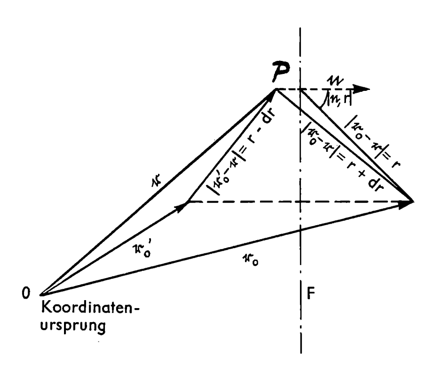


Abb. VI, 3

Zur Berechnung der Greenschen Funktion für die Ebene nehmen wir die Abb. VI, 3 zu Hilfe. Die Bedingung (VI, 99), die das Verschwinden von G auf der Ebene fordert, befriedigen wir dadurch, daß wir in einem Punkte $\mathfrak{r}_0'$ spiegelbildlich zum Punkt $\mathfrak{r}_0$ eine punktförmige Senke angebracht denken, die die negative Neutronenflußverteilung

$$-\frac{e^{iB|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0'|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}$$

bewirkt. Daß so etwas in Wirklichkeit nicht existieren kann, ist selbstverständlich. Die Greensche Funktion soll ja aber auch nur eine Hilfsgröße ohne physikalische Realisierbarkeit sein. Die Greensche Funktion der Ebene, die den Bedingungen (VI, 98–100) genügt, ist

$$G = \frac{e^{iB|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|} - \frac{e^{iB|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0'|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0'|}. \qquad \text{(VI, 104)}$$

Den Gradienten von G auf der Ebene F, den wir für die Gl. (VI, 103) benötigen, bilden wir nach der Abb. VI, 3, indem wir den Schnittpunkt P der Fahrstrahlen $|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0| = r$ und $|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0'| = r$ ein wenig aus der Ebene F herausziehen. Die Greensche Funktion wird an diesem der Ebene benachbarten Punkt, wenn wir zur Abkürzung den Fahrstrahl $|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0'|$ von $\mathfrak{r}_0'$ bis zu dem Punkt P mit $r - d\,r$ und den von r_0 nach P mit $r + d\,r$ bezeichnen.

$$dG = \frac{e^{iB\,(r+dr)}}{r+dr} - \frac{e^{iB\,(r-dr)}}{r-dr} = 2\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{e^{iBr}}{r}\,dr. \qquad \text{(VI, 105)}$$

In dem inneren Produkt (grad G, $d\mathfrak{f}$) sind die beiden Vektoren in diesem Falle gleichgerichtet. Wir müssen also den Betrag des Gradienten von G bilden, um ihn mit dem Betrag des Flächenelementes zu multiplizieren. Aus der Gl. (VI, 105) und der Abb. VI, 3 folgt:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{dG}{dr}\frac{\partial r}{\partial n} = 2\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{e^{iBr}}{r}\cos(n, r), \tag{VI, 106}$$

worin $\frac{\partial G}{\partial n}$ die Ableitung der Greenschen Funktion nach der Flächennormalen von F bedeutet, und $\cos(n, r)$ den Kosinus des Winkels zwischen der Richtung der Flächennormalen und r.

Die Ableitung der Greenschen Funktion nach r ist

$$\frac{dG}{dr} = \left(\frac{iB}{r} - \frac{1}{r^2}\right) e^{iBr}. \tag{VI, 107}$$

Durch Einsetzen dieser Gl. (VI, 107) in die (Gl. VI, 103) erhalten wir

$$\Phi(\mathfrak{r}_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_F \Phi(\mathfrak{r})\left(\frac{iB}{r} - \frac{1}{r^2}\right) e^{iBr}\cos(n, r)\, df. \tag{VI, 108}$$

Das Auftreten des Faktors $\cos(n, r)$ in dieser Gleichung besagt, daß das Fenster unter einem Winkel (n, r) betrachtet um den Faktor $\cos(n, r)$ kleiner erscheint, als es in Wirklichkeit ist. Dadurch ist auch der Fluß Φ an der Stelle $\mathfrak{r}_0$ um diesen Faktor kleiner.

Weiterhin zeigt die Gl. (VI, 108), daß sich der Fluß $\Phi(\mathfrak{r}_0)$ aus zwei Anteilen zusammensetzt, und zwar ist der erste Summand iB/r im weiten Abstand vom Fenster, der zweite Anteil $1/r^2$ in der Nähe ausschlaggebend. Im allgemeinen wird man nur einen der beiden Anteile zu berücksichtigen haben, je nachdem ob $\mathfrak{r}_0$ im Fern- oder im Nahfeld des Fensters liegt. Darüber entscheidet der Krümmungsfaktor B. Es ist für

$$\left.\begin{array}{ll} r \ll 1/B & \text{(Nahfeld)} \\ r \gg 1/B & \text{(Fernfeld)} \end{array}\right\}. \tag{VI, 109}$$

Man kann zur Behandlung dieses Problems des Neutronenfensters auch die Greensche Funktion so festlegen, daß ihr Gradient auf der Fläche F verschwindet. Dann erscheint in der der Gl. (VI, 103) entsprechenden Gleichung anstelle des $\Phi(\mathfrak{r})$ im Integranden der Gradient von $\Phi(\mathfrak{r})$ und dafür anstelle des Gradienten von G die Greensche Funktion selber. Im allgemeinen ist die Bedingung $\Phi(\mathfrak{r}) = 0$ auf der Fläche F außerhalb des Fensters besser zu erfüllen als die Bedingung $\operatorname{grad}\Phi(\mathfrak{r}) = 0$.

Die Formel, die man erhält, wenn man grad G auf der Fläche F verschwinden läßt, lautet:

$$\Phi(\mathfrak{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_F G\,(\operatorname{grad}\Phi, d\mathfrak{f}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{iB|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_0|}\,(\operatorname{grad}\Phi, d\mathfrak{f}) \qquad \text{(VI, 110)}$$

in Übereinstimmung mit dem zweiten Teil der Gl. (VI, 87).

VII. Fouriersche Reihen, -Integrale, Zylinder- und Kugelfunktionen

Geht man von der Diffusionsgleichung des stationär laufenden Reaktors

$$\Delta\Phi + B^2\Phi = 0 \qquad \text{(VII, 1)}$$

zur entsprechenden zeitabhängigen Gleichung

$$\Delta\Phi + B^2\Phi = \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \qquad \text{(VII, 2)}$$

über, so muß man im allgemeinen bedenken, daß die zeitliche Änderung des Neutronenflußes in verschiedenen Teilen des Cores verschiedenartig ablaufen kann. Dieser Möglichkeit soll im folgenden Rechnung getragen werden.

Zunächst wollen wir die Gl. (VII, 2) in kartesischen Koordinaten schreiben, wobei wir uns aber auf eine Dimension x beschränken. Wir beschreiben also einen Reaktor, der in den Dimensionen y und z unendlich groß ist, und in dem der Neutronenfluß sich nur mit der Koordinate x ändert. Die Dicke dieses scheibenförmigen Reaktors sei x_1 und der materielle Krümmungsfaktor, der hier zunächst noch reell sei, ist B. Die Gl. (VII, 2) lautet dann

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + B^2\Phi = \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \qquad \text{(VII, 3)}$$

Durch einen Produktansatz, wie wir ihn im Bd. I, Abschnitt II bei der Behandlung der Gl. (II, 81) verwendeten, erhalten wir hier mit $\Phi = R(x)\cdot T(t)$

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dx^2} + B^2 = \frac{1}{a}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}. \qquad \text{(VII, 4)}$$

Da links eine Funktion von x, rechts eine Funktion von t steht, können wir beide Seiten gleich einer Konstanten $-K^2$ setzen:

$$\frac{d^2 R}{d x^2} + (B^2 + K^2)\, R = 0, \tag{VII. 5}$$

$$\frac{dT}{dt} + aK^2\, T = 0. \tag{VII, 6}$$

Für $\Phi = R(x) \cdot T(t)$ ergibt sich aus den beiden Gl. (VII, 5 und 6):

$$\Phi\,(x, t) = A \cos \sqrt{B^2 + K^2}\, x \cdot e^{-a K^2 t} \tag{VII, 7}$$

Der Neutronenfluß $\Phi(x, t)$ soll an den Stellen $x = +\frac{x_1}{2}$ und $x = -\frac{x_1}{2}$ zu allen Zeiten verschwinden, so daß

$$\sqrt{B^2+K^2} = n\,\frac{\pi}{x_1} \tag{VII, 8}$$

sein muß. n ist eine beliebige ganze Zahl.

Wir wollen schon jetzt darauf hinweisen, daß wir bei der der Gl. (VII, 8) entsprechenden Gl. (II, 127), Bd. I, die der Festlegung des Krümmungsfaktors B diente, stillschweigend die Zahl n gleich eins genommen hatten, obgleich wir konsequenterweise auch dort hätten $k_x = n\,\frac{\pi}{x_1}$ schreiben müssen. Wir werden aber gleich sehen, warum wir im Bd. I, Abschnitt II, für den stationären Fall die Zahl n gleich eins setzen mußten.

Setzen wir aus der Gl. (VII, 8) das K in die Gl. (VII, 7) ein, so wird

$$\Phi\,(x, t) = A \cos n\,\frac{\pi}{x_1}\, x \cdot e^{-a \left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1{}^2} - B^2\right) t}. \tag{VII, 9}$$

Für jedes n ist die Gl. (VII, 9) eine Lösung der Diffusionsgleichung (VII, 3). Folglich muß auch eine Summe solcher Lösungen eine Lösung der Gl. (VII, 3) sein:

$$\Phi\,(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\,\frac{\pi}{x_1}\, x e^{-a \left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1{}^2} - B^2\right) t}, \tag{VII, 10}$$

worin die A_n zunächst noch beliebige Konstanten sind, die zweckmäßigerweise nach den Anfangsbedingungen festgelegt werden. Zuvor aber wollen wir noch die kritische Bedingung für diesen eindimensionalen Reaktor in die Gl. (VII, 10) einführen. Sie lautet entsprechend der Gl. (II, 127) im Bd. I:

$$B^2 = \frac{\pi^2}{x_1{}^2}.$$

Aus der Gl. (VII, 10) wird damit

$$\Phi\,(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n \frac{\pi}{x_1} x\, e^{-a \frac{\pi^2}{x_1^2}(n^2-1)\,t}. \qquad \text{(VII, 11)}$$

Um die A_n zu bestimmen, betrachten wir die Funktion $\Phi(x, t)$ zur Zeit $t = 0$

$$\Phi\,(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n \frac{\pi}{x_1} x. \qquad \text{(VII, 12)}$$

Wir nehmen nun an, daß zur Zeit $t = 0$ der Neutronenfluß eine Form hatte, die nicht dem stationären Fall $\Phi = A \cos \frac{\pi}{x_1} x$ entsprach, sondern irgendwie verzerrt war, etwa dadurch, daß künstliche Neutronenquellen und absorbierende Stoffe, z. B. Regelstäbe, in den Reaktor eingebracht wurden. Die Randbedingung $\Phi\left(\pm \frac{x_1}{2}, t\right) = 0$ soll dabei erhalten bleiben. Die dadurch gewaltsam erreichte Neutronenflußverteilung $\Phi(x, 0)$ möge etwa die in der Abb. VII, 1 gezeichnete Kurve darstellen. Die Funktion $\Phi\,(x, 0)$ ist durch die Gl. (VII, 12) in der Form einer Fourier-Reihe gegeben, und wir erhalten die Konstanten A_n dadurch, daß wir die Gl. (VII, 12) beiderseits jeweils mit der Funktion $\cos \nu \frac{\pi}{x_1} x$ multiplizieren und sie über eine Periode integrieren:

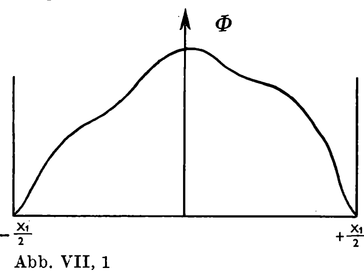


Abb. VII, 1

$$\int\limits_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \cos \nu \frac{\pi}{x_1} \xi\, d\xi = \int\limits_{(2x_1)} \cos \nu \frac{\pi}{x_1} \xi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n \frac{\pi}{x_1} \xi\, d\xi. \qquad \text{(VII, 13)}$$

Darin wurde die Periode durch den Index $(2\,x_1)$ angedeutet und zur Kennzeichnung der Integrationsvariablen x durch ξ ersetzt. ν ist eine ganze Zahl wie n.

Zur rechten Seite der Gl. (VII, 13) liefert nur jeweils der Summand einen Beitrag, dessen Summationsindex n mit ν übereinstimmt.

Es ist nämlich

$$\int\limits_{(2x_1)} \cos n \frac{\pi}{x_1} \xi \cdot \cos \nu \frac{\pi}{x_1} \xi d\xi = \begin{cases} x_1 \text{ für } n = \nu \\ 0 \text{ für } n \neq \nu \end{cases}. \qquad \text{(VII, 14)}$$

Funktionen, die einer Bedingung von der Art der Gl. (VII, 14) genügen, nennt man orthogonale Funktionen. Wir kommen auf die Orthogonalitätseigenschaften einiger Funktionen später noch einmal zurück.

Mit der Gl. (VII, 14) folgt aus der Gl. (VII, 13)

$$A_n = \frac{1}{x_1} \int\limits_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \cos n \frac{\pi}{x_1} \xi d\xi. \qquad \text{(VII, 15)}$$

Damit sind die Konstanten A_n in der Gl. (VII, 11) auf die Anfangsbedingung $\Phi(x, 0)$ festgelegt. Vom Zeitpunkt $t = 0$ an soll der Reaktor sich selbst überlassen werden, d. h. die äußere Einwirkung, die den Neutronenfluß zu der Funktion $\Phi(x, 0)$ verzerrte, fällt vom Augenblick $t = 0$ an fort. Von da an wird der Reaktor versuchen, die Störung auszugleichen, so, daß die anfangs verzerrte Flußverteilung allmählich in die $\cos \frac{\pi}{x_1} x$ - Verteilung übergeht. Diesen Ausgleichsvorgang beschreibt die Gl. (VII, 11).

Wir sehen, daß der Ausgleich bei den Fourierkomponenten hoher Ordnungszahl von $\Phi(x, 0)$, also für große n, sehr viel schneller vonstatten geht als für die kleinen Ordnungszahlen, und es wird nun klar, warum wir im Bd. I, Abschnitt II das n gleich eins setzen mußten: Die Komponente mit $n = 1$ ist die einzige, die stationär ist. Jede eingeprägte Störung, die eine höhere Komponente enthält, klingt exponentiell ab. Würden wir die kritische Bedingung Gl. (VII, 10) andererseits z. B. so gewählt haben, daß $B = 2$ wäre, so hätte es in der Fourier-Reihe eine Komponente kleinster Ordnung gegeben, die exponentiell mit der Zeit angestiegen wäre.

Die stationäre Komponente ist also mit $n = 1$

$$\Phi(x) = A_1 \cos \frac{\pi}{x_1} x = A_1 \cos Bx. \qquad \text{(VII, 16)}$$

Wenn wir das obige Problem des Ausgleichs einer Störung für einen Reaktor behandelt hätten, in dem während des Ausgleichsvorganges, also von $t = 0$ an, die Neutronenabsorption die Produktion überwogen hätte, so daß $B^2 < 0$ und B imaginär $B = i\varkappa$ geworden wäre, so hätte die Gl. (VII, 10) lauten müssen

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n \frac{\pi}{x_1} x e^{-a\left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1^2} + \varkappa^2\right) t}. \qquad \text{(VII, 17)}$$

Dann gibt es keine stationären Komponenten. Natürlich ist der Anwendungsbereich der Diffusionsgleichung (VII, 2) im Falle eines imaginären Krümmungsfaktors nicht auf das Reaktorcore, das hier nur als Beispiel gewählt wurde, beschränkt. Man kann vielmehr auf diese Weise Ausgleichsvorgänge in jedem Neutronen absorbierenden, begrenzten Material beschreiben.

Wir wenden uns jetzt wieder den Fourier-Reihen zu und ergänzen, daß man bei anders gewähltem Koordinatenmittelpunkt die Funktion $\Phi(x, o)$ und $\Phi(x, t)$ auch in Komponenten schreiben kann, die an der Stelle des Kosinus jeweils den Sinus enthalten. Die allgemeine Darstellung einer Funktion $\Phi(x, t)$, die der Differentialgleichung (VII, 3) genügt und der Anfangsbedingung $\Phi(x, 0)$, ist demnach:

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \cos n \frac{\pi}{x_1} \xi \, d\xi \right] \cos n \frac{\pi}{x_1} x e^{-a\left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1^2} - B^2\right) t} +$$

$$+ \frac{1}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \sin n \frac{\pi}{x_1} \xi \, d\xi \right] \sin n \frac{\pi}{x_1} x e^{-a\left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1^2} - B^2\right) t}. \qquad \text{(VII, 18)}$$

Sehr viel bequemer als mit Winkelfunktionen lassen sich die Fourier-Reihen in periodischen Exponentialfunktionen schreiben. Wir wollen deshalb die Lösung der Diffusionsgleichung auch in diesen Funktionen als Fourier-Reihe angeben.

Die Funktion $\Phi(x, t)$ wird jetzt

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in \frac{\pi}{x_1} x} \cdot e^{-a\left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1^2} - B^2\right) t}. \qquad \text{(VII, 19)}$$

Die C_n sind wieder Konstante, die wir aus den Anfangsbedingungen bestimmen müssen.

Dadurch, daß wir von $-\infty$ bis $+\infty$ summieren, erfassen wir hier in einer Summe alle Lösungen der Gl. (VII, 3), die wir in der Gl. (VII, 18) in zwei Summen schreiben mußten. Durch Kombination der Exponentialfunktion mit negativen und positiven n kann man natürlich wieder die Darstellung in Winkelfunktionen gewinnen.

Für den Zeitpunkt $t = 0$ wird aus der Gl. (VII, 19)

$$\Phi(x, 0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{in \frac{\pi}{x_1} x}. \tag{VII, 20}$$

Durch beiderseitige Multiplikation mit $e^{-in \frac{\pi}{x_1}}$ und Integration über eine Periode erhält man wieder eine der Gl. (VII, 14) analoge Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{(2x_1)} e^{-in \frac{\pi}{x_1} \xi} \, e^{i\nu \frac{\pi}{x_1} \xi} \, d\xi = \begin{cases} 2x_1 & \text{für } \nu = n \\ 0 & \text{für } \nu \neq n \end{cases} \tag{VII, 21}$$

die Bestimmungsgleichung für die C_n:

$$C_n = \frac{1}{2x_1} \int_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \, e^{i\nu \frac{\pi}{x_1} \xi} \, d\xi. \tag{VII, 22}$$

Durch Kombination der Gln. (VII, 20 und 22) erhalten wir

$$\Phi(x, 0) = \frac{1}{2x_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \, e^{in \frac{\pi}{x} (x-\xi)} \, d\xi \tag{VII, 23}$$

und für den zeitabhängigen Fluß $\Phi(x, t)$ aus den Gln. (VII, 19) und (VII, 22)

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2x_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \; e^{-in \frac{\pi}{x_1} (x-\xi) - a \left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1^2} - B^2\right) t} \, d\xi. \tag{VII, 24}$$

Die Gl. (VII, 24) ist äquivalent der Gl. (VII, 18). Derartige Fourier-Reihen benutzt man bei Ausgleichsvorgängen immer dann, wenn das Medium in dem die Diffusionsgleichung (VII, 2) gilt, begrenzt ist, so daß feste, zeit- und ortsunabhängige Randbedingungen gegeben sind.

Häufig kann man Ausgleichsvorgänge jedoch so behandeln, als sei das Medium unbegrenzt. Das ist dann der Fall, wenn das Gebiet, in dem der

Ausgleichsvorgang stattfindet, so klein ist, daß man zu keiner Zeit t mit einer nennenswerten Rückwirkung des Ausgleichsvorganges von den Rändern des Gebietes her zu rechnen braucht. In diesem Falle benutzt man anstelle der Fourier-Reihe das Fourier-Integral. Das Fourier-Integral entsteht aus der Fourier-Reihe dadurch, daß man die Stufen zwischen den n und $n + 1$ infinitesimal eng macht und gleichzeitig die Periode $2\,x_1$ ins Unendliche wachsen läßt.

Auf diese Weise geht die Gl. (VII, 23) über in

$$\Phi\,(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi\,(\xi, 0)\, e^{ik\,(x-\xi)}\, dk\, d\xi \qquad \text{(VII, 25)}$$

und die Gl. (VII, 24) in

$$\Phi\,(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi\,(\xi, 0)\, e^{ik\,(x-\xi) - a\,(k^2 - B^2)\,t}\, dk\, d\xi. \qquad \text{(VII, 26)}$$

Die Wellenzahl k ist der Grenzwert des Quotienten $\frac{n\pi}{x_1} \to k$, wenn n und x_1 unendlich groß werden.

Die der Fourier-Reihe in Winkelfunktionen Gl. (VII, 18) entsprechende Fourier-Integraldarstellung lautet:

$$\Phi\,(x, t) \equiv \frac{1}{\pi} \int\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\xi=-\infty}^{+\infty} \Phi\,(\xi, 0)\, \cos k\,(x - \xi)\, e^{-a\,(k^2 - B^2)\,t}\, dk\, d\xi. \qquad \text{(VII, 27)}$$

Jedoch ist fast immer die Darstellung in Exponentialfunktionen Gl. (VII, 26) der in Winkelfunktionen überlegen, weil es sehr viel bequemer ist, die Integration in der komplexen Ebene auszuführen als im reellen Bereich.

Der große Vorteil der Darstellung von Diffusionsvorgängen in Fourier-Reihen bzw. -Integralen besteht darin, daß in dieser Schreibweise die Funktion $\Phi\,(x, t)$ auf jeden Fall der Diffusionsgleichung (VII, 3) genügt. Das ganze Diffusionsproblem ist damit reduziert auf die Summation bzw. Integration über Funktionen, die nur mehr die Anfangsverteilung des Neutronenflusses $\Phi\,(x, 0)$ enthalten. Wir wollen noch in der Gl. (VII, 26) das B^2 durch $-\varkappa^2$ ersetzen; denn das über k genommene Integral konver-

giert nur, wenn der Betrag des Realteils von k größer ist als B. Wir geraten also bei der Integration über k von $-\infty$ bis $+\infty$ zwangsläufig durch einen Bereich, in dem das Fourier-Integral divergiert, was natürlich nicht sein darf und auch physikalisch sinnlos ist; denn ein reelles B in der Diffusionsgleichung (VII, 3) bedeutet, daß die Neutronenproduktion in dem jetzt unendlich ausgedehnten Reaktor größer ist als die Absorption. In diesem Falle müßte der Neutronenfluß exponentiell ansteigen. Das Fourier-Integral ist also nur anwendbar im Falle eines imaginären Krümmungsfaktors $B = i\varkappa$. Aus der Gl. (VII, 26) wird dann

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, 0)\, e^{ik(x-\xi) - a(k^2+\varkappa^2)t}\, dk\, d\xi. \qquad \text{(VII, 28)}$$

Dieses Integral konvergiert im ganzen k-Bereich. Wir können den Faktor $e^{-a\varkappa^2}$ aus dem Integral ziehen und erhalten

$$\Phi(x,t) = e^{-a\varkappa^2 t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi,0)\, e^{ik(x-\xi) - ak^2 t}\, dk\, d\xi \right]. \qquad \text{(VII, 29)}$$

Hier enthält die eckige Klammer die Lösung der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad \text{(VII, 30)}$$

die von der Art der Wärmeleitungsgleichung ist, und sich von der Gl. (VII, 3) nur durch das Fehlen des Gliedes $B^2\Phi = -\varkappa^2\Phi$ unterscheidet. Wir sehen also, daß man die Lösung der Diffusionsgleichung (VII, 3) mit imaginärem B dadurch erhält, daß man die Lösung der Gl. (VII, 30) mit dem Absorptionsfaktor $e^{-a\varkappa^2 t}$ multipliziert.

Durch die Ausführung der Integration nach k erhält man aus der Gl. (VII, 29):

$$\Phi(x,t) = \frac{e^{-a\varkappa^2 t}}{\sqrt{4\pi a t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi,0)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}}\, d\xi. \qquad \text{(VII, 31)}$$

2. *Zylinderfunktionen.*

Sehr viel wichtiger als die eben behandelte Lösung der Diffusionsgleichung in kartesischen Koordinaten ist die in Zylinderkoordinaten. Wir

wollen deshalb auch diesen Fall durchrechnen und bei der Gelegenheit einige Eigenschaften der Zylinderfunktionen zusammenstellen. Wieder vereinfachen wir das Problem ein wenig, indem wir mit einem unendlich hohen Zylinder rechnen. Die Behandlung des Zylinders endlicher Höhe gelingt wieder mit Hilfe des Produktansatzes und bringt nichts Neues und keine zusätzlichen Schwierigkeiten.

Die Diffusionsgleichung (VII, 2) lautet in Zylinderkoordinaten mit der Gl. (VI, 62), in der wir die z-Abhängigkeit fortlassen:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + B^2 \Phi = \frac{1}{a}\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \qquad \text{(VII, 32)}$$

Die Koordinatenbezeichnungen sind die gleichen wie in der Gl. (VI, 62). Durch den Produktansatz

$$\Phi(r, \varphi, t) = R(r) \cdot \Psi(\varphi) \cdot T(t) \qquad \text{(VII, 33)}$$

erhalten wir

$$\frac{1}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R}\frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\Psi}\frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = \frac{1}{a}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} - B^2. \qquad \text{(VII, 34)}$$

Auf der linken Seite steht jetzt eine Funktion nur von r und φ und rechts nur eine von t. Es sind also beide Seiten gleich einer Konstanten $-\lambda^2$:

$$\frac{dT}{dt} + a(\lambda^2 - B^2)\, T = 0, \qquad \text{(VII, 35)}$$

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} r \frac{dR}{dr} + \lambda^2 r^2 = -\frac{1}{\Psi}\frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2}. \qquad \text{(VII, 36)}$$

Die Lösung der ersten Gleichung VII, 35) schreiben wir in der Form

$$T = e^{-a(\lambda^2 - B^2)t}, \qquad \text{(VII, 37)}$$

und in der Gl. (VII, 36) sind wieder beide Seiten gleich einer Konstanten n^2:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} + n^2 \Psi = 0, \qquad \text{(VII, 38)}$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + (\lambda^2 r^2 - n^2)\, R = 0. \qquad \text{(VII, 39)}$$

Eine Lösung der Gl. (VII, 38) ist

$$\Psi = e^{in\varphi}. \qquad \text{(VII, 40)}$$

Die Gl. (VII, 39) ist die Besselsche Differentialgleichung, die wir noch durch die Substitution $x = \lambda r$ auf die Normalform

$$x^2 \frac{d^2 R}{d x^2} + x \frac{dR}{d x} + (x^2 - n^2) R = 0 \qquad \text{(VII, 41)}$$

bringen.

In der Reaktortechnik interessiert meistens das Verhalten der Besselschen Funktionen in der Umgebung ihres Nullpunktes bzw. bis zur ersten Nullstelle. Wir wollen deshalb mit den Potenzreihenentwicklungen im Nullpunkt beginnen.

Setzen wir den Potenzreihenansatz für $R_n(x)$

$$R_n(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \text{(VII, 42)}$$

in die Gl. (VII, 41) ein, so führt die Methode des Koeffizientenvergleichs auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (m^2 - n^2)\, a_0 &= 0 \\ [(m+1)^2 - n^2]\, a_1 &= 0 \\ &\vdots \\ [(m+k)^2 - n^2]\, a_k + a_{k-2} &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(VII, 43)}$$

Die Rekursionsformel für die Koeffizienten lautet also

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(m+k)^2 - n^2}. \qquad \text{(VII, 44)}$$

Wenn der erste Koeffizient der Reihe (VII, 42) nicht verschwinden soll, so muß $m = \pm n$ sein. a_0 ist dann willkürlich, und die übrigen Koeffizienten mit geraden Indizes ergeben sich, wenn $m = +n$ ist, zu

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)} \qquad \text{(VII, 45)}$$

und wenn $m = -n$ ist, zu

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(-2n+k)} \qquad \text{(VII, 46)}$$

Die Koeffizienten mit ungeraden Indizes verschwinden. Durch Einsetzen in die Gl. (VII, 42) ergibt mit $m = +n$.

$$R_n(x) = a_0 x^n \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4\,(2n+2)\,(2n+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6\,(2n+2)\,(2n+4)\,(2n+6)} \cdots \right] \quad \text{(VII, 47)}$$

und für $m = -n$:

$$R_{-n}(x) = a_0\, x^{-n} \left[1 + \frac{x^2}{2\,(2n-2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4\,(2n-2)\,(2n-4)} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6\,(2n-2)\,(2n-4)\,(2n-6)} \cdots \right] \quad \text{(VII, 48)}$$

(n keine ganze positive Zahl).

Die beiden Lösungen (VII, 47 und 48) sind linear unabhängig, doch werden sie identisch für $n = 0$. Außerdem wird die Reihe (VII, 48) sinnlos für negative ganzzahlige n. In diesen Fällen ist jeweils nur eine der beiden Lösungen der Gl. (VII, 41) in eine Potenzreihe um den Nullpunkt entwickelbar. Es genügt, wenn wir uns auf die Reihe (VII, 47) beschränken und dabei auch negative n zulassen, nur müssen wir dann negativ ganzzahlige n ausschließen.

Üblicherweise werden die Lösungen der Besselschen Gleichung normiert, indem man in der Gl. (VII, 47) $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ schreibt. Man erhält dadurch die sogenannte Besselfunktionen erster Art:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} \cdot k!\,(n+k)!} \quad \text{(VII, 49)}$$

(n keine ganze negative Zahl)

oder, indem man die Fakultäten durch die entsprechenden Gammafunktionen ersetzt:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+k}}{2^{n+2k} \cdot k!\; \Gamma(n+k+1)} \quad \text{(VII, 50)}$$

(n keine ganze negative Zahl).

Dabei haben wir die Gl. (VII, 48) auch mit durch die Gln. (VII, 49 und 50) dargestellt.

Für unganze n haben wir also bereits die beiden Lösungen der Besselgleichung in der Potenzreihendarstellung gefunden, für ganze n jedoch nur eine, weil die andere ausgeschlossen werden mußte. Folglich muß es noch eine Art von Lösungen geben, die wir mit der Reihendarstellung nicht erfaßt haben. Diese Gruppe von Lösungen der Besselschen Gleichung nennt man die Besselfunktionen zweiter Art. Wir wollen sie ohne Beweis anschreiben, zunächst für unganze n:

$$N_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n x - J_{-n}(x)}{\sin n x} \quad (n \text{ keine ganze Zahl}) \qquad \text{(VII, 51)}$$

und für ganze positive n:

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{2^{2k-n} \cdot k!} x^{2k-n} \qquad \text{(VII, 52)}$$

(n positive ganze Zahl oder null).

Die Besselschen Funktionen zweiter Art $N(x)$, in der englischen Literatur mit $Y(x)$ bezeichnet, heißen auch Neumannsche Funktionen.

Es muß, da für unganze n bereits die Gln. (VII, 47 und 48) die linear unabhängigen Lösungen der Besselgleichung waren, die Gl. (VII, 51) durch eine Linearkombination aus den Gln. (VII, 47 und 48) hervorgehen. Die Gl. (VII, 52) für ganze n erhält man dann aus der Gl. (VII, 51) durch den Grenzübergang vom unganzen zum ganzen n.

Die Neumannschen Funktionen bilden zusammen mit den entsprechenden Besselfunktionen erster Art vollständige Lösungen der Besselgleichung:

$$R_n(x) = Z_n(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x), \qquad \text{(VII, 53)}$$

worin C_1 und C_2 beliebige Konstante sind. Die Funktionen $Z_n(x)$ heißen Zylinderfunktionen.

Die Besselfunktionen erster und zweiter Art haben eine gewisse Ähnlichkeit mit den Winkelfunktionen, und zwar entspricht die Funktion $J_n(x)$ dem $\cos(x)$ und die Funktion $N_n(x)$ dem $\sin x$. Es ist deshalb naheliegend, auch den den Winkelfunktionen verwandten Exponentialfunktionen e^{ix} und e^{-ix} entsprechende Zylinderfunktionen zu definieren:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i\,N_n(x); \qquad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i\,N_n(x). \qquad \text{(VII, 54)}$$

$H_n^{(1)}(x)$ und $H_n^{(2)}(x)$ heißen Hankelsche Funktionen oder auch Besselsche Funktionen dritter Art. Sie sind auch linear unabhängige Lösun-

gen der Besselschen Gleichung. Wir geben noch zwei weitere Beziehungen an, die zwischen Besselfunktionen bestehen und eine Analogie zu den Winkelfunktionen haben:

$$J_n(x) = \frac{1}{2}\left(H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)\right), \tag{VII, 55}$$

$$N_n(x) = \frac{1}{2i}\left(H_n^{(1)}(x) - H_n^{(2)}(x)\right). \tag{VII, 56}$$

Die der Gl. (VII, 51) entsprechende Darstellung in Hankelfunktionen lautet:

$$H_n^{(1)}(x) = i\,\frac{e^{-in\pi} J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n x} \quad (n \text{ keine ganze Zahl}), \tag{VII, 57}$$

$$H_n^{(2)}(x) = -i\,\frac{e^{in\pi} J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n x} \quad (n \text{ keine ganze Zahl}). \tag{VII, 58}$$

Der Verlauf der verschiedenen Zylinderfunktionen ist in der Abb. VII, 3 gezeichnet.

Wir geben noch die für viele Rechnungen sehr nützliche Integraldarstellung der Zylinderfunktionen an. Es handelt sich dabei um Linienintegrale in der komplexen Ebene. Die verschiedenartigen Besselfunktionen unterscheiden sich im wesentlichen durch die Integrationswege. Die Abb. VII, 2 zeigt die Integrationswege, die zu den verschiedenen Arten von

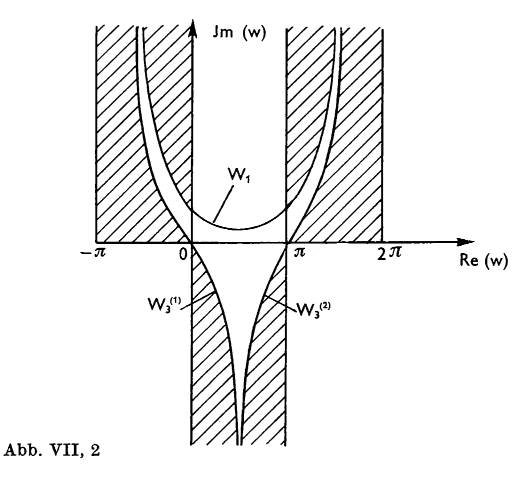


Abb. VII, 2

Besselfunktionen führen. In den schraffierten Gebieten der w-Ebene darf auf den eingezeichneten Wegen bis ins Unendliche integriert werden. Die Besselfunktionen der ersten Art sind gegeben durch:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{W_1} e^{i\,[x \cos w + n\,(w - \frac{\pi}{2})]}\, d\,w. \qquad \text{(VII, 59)}$$

Die Integration in der w-Ebene ist auf dem Wege W_1 durchzuführen. n kann in der Darstellung (VII, 59) ganz oder unganz sein, während

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{in\,(w - x \sin w)}\, dw \qquad \text{(VII, 60)}$$

nur für ganze n gilt. Der Integrationsweg ist der reelle Abschnitt zwischen $-\pi$ und $+\pi$.

Die Hankelschen Funktionen lauten:

$$H_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{W_3^{(1)}} e^{i\,[x \cos w + n\,(w - \frac{\pi}{2})]}\, d\,w \qquad \text{(VII, 61)}$$

$$H_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{W_3^{(2)}} e^{i\,[x \cos w + n\,(w - \frac{\pi}{2})]}\, d\,w \qquad \text{(VII, 62)}$$

mit den in der Abb. VII, 2 eingezeichneten Integrationswegen $W_3^{(1)}$ und $W_3^{(2)}$.

Wir wenden uns nun wieder der Gl. (VII,2) zu, deren Lösung wir in der Form einer Fourier-Reihe angeben wollen.

Über die Zahl n in der Gl. (VII,38) hatten wir noch nicht verfügt, müssen sie aber natürlich so festlegen, daß die Funktion $\Psi(\varphi)$ für alle φ eindeutig ist. Das bedeutet, daß n eine ganze Zahl oder gleich null sein muß. Wir können deshalb das Produkt $R(r) \cdot \Psi(\varphi)$ als Fourier-Reihe in der Form schreiben

$$R(r) \cdot \Psi(\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(r)\, e^{in\varphi}, \qquad \text{(VII, 63)}$$

worin C_n eine Funktion von r sein soll:

$$C_n(r) = \frac{R(r)}{2\pi} \int\limits_{(2\pi)} \Psi(\varphi)\, e^{-in\varphi} d\varphi. \qquad \text{(VII, 64)}$$

Die Funktion $R(r)$ ist die Lösung der Besselschen Differentialgleichung (VII, 39), die wir mit der Substitution $x = \lambda r$ gelöst hatten. Unter den verschiedenartigen Besselfunktionen, die wir als Lösungen besprochen haben, wählen wir diejenige aus, die den folgenden Bedingungen genügt. Bei $r = 0$ soll sie einen endlichen Wert haben und an einer Stelle $r = r_1$, etwa am Rande des Reaktors, verschwinden. Diesen Bedingungen genügen allein die Besselfunktionen J_n. Die J_n haben aber unendlich viele Nullstellen, und das bedeutet, daß alle Funktionen J_n, für die $J_n\,(\lambda_{nm}, m, r_1)$ verschwindet, als Lösungen in Frage kommen. Die λ_{nm} sind feste Werte, die sich aus den Nullstellen x_{nm} der Besselfunktionen J_n berechnen lassen:

$$x_{nm} = \lambda_{nm}\, r_1 \text{ mit } J_n\,(x_{nm}) = 0. \qquad \text{(VII, 65)}$$

Wir stellen nun die Funktion $\Phi = R \cdot \Psi \cdot T$ mit den Gln. (VII, 35 und 38) wieder als Fourier-Reihe dar, aber so, daß die einzelnen Komponenten nicht wie bisher Winkelfunktionen, sondern die Besselfunktionen $J_n\,(\lambda_{nm}, r)$ sind:

$$\Phi\,(r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\, J_n\,(\lambda_{nm}\, r)\, e^{in\varphi} \cdot e^{-a\,(\lambda_{nm}^2 - B^2)\, t}. \qquad \text{(VII, 66)}$$

Diese Gleichung entspricht genau der Gl. (VII, 10), nur ist hier eine doppelte Summation notwendig, was aus der auf zwei Dimensionen erweiterten Rechnung folgt. Außerdem entspricht der Summation über n in der Gl. (VII, 10) hier in der Gl. (VII, 66) die Summation über m.

Wie im eindimensionalen Fall machen wir, um die Koeffizienten A_{nm} zu finden, das Problem von den Anfangsbedingungen abhängig, indem wir für $t = 0$ die Gl. VII, 66) schreiben:

$$\Phi\,(r, \varphi, 0) = R\,(r) \cdot \Psi\,(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\, J_n\,(\lambda_{nm}\, r)\, e^{in\varphi}. \qquad \text{(VII, 67)}$$

Der Vergleich mit der Gl. (VII, 63) zeigt, daß die $C_n\,(r)$

$$C_n\,(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\, J_n\,(\lambda_{nm}\, r) \qquad \text{(VII, 68)}$$

zu setzen sind. Die Gl. (VII, 68) entspricht der Gl. (VII, 12).

Zur Bestimmung der Koeffizienten A_{nm} können wir wieder eine Orthogonalitätsbeziehung ähnlich wie bei den Winkelfunktionen anwenden. Sie lautet hier:

$$\int_0^{r_1} J_n(\lambda_{nm} r) \cdot J_n(\lambda_{n\mu} r)\, r\, dr = \begin{cases} E_{nm} & \text{für } n = \mu \\ 0 & \text{,, } n \neq \mu \end{cases}, \qquad \text{(VII, 69)}$$

worin die E_{nm} von n und m abhängige Konstante sind:

$$E_{nm} = \frac{r_1^2}{2} \left[\frac{d}{dr} J_n(\lambda_{nm} r_1) \right]^2. \qquad \text{(VII, 70)}$$

Aus den Gln. (VII, 69, 68 und 64) mit $R \cdot \Psi = \Phi(r, \varphi, 0)$ gewinnt man die Bestimmungsgleichung für die A_{nm}:

$$A_{nm} = \frac{1}{2\pi E_{nm}} \int_0^{r_1} \int_{(2\pi)} \Phi(r, \varphi, 0)\, J_n(\lambda_{nm} r)\, e^{i n \varphi - a(\lambda_{nm}^2 - B^2) t}\, r dr d\varphi. \qquad \text{(VII, 71)}$$

Durch die Rückführung der Koeffizienten A_{nm} auf die Anfangsverteilung $\Phi(r, \varphi, 0)$ ist die Fourier-Darstellung der Funktion $\Phi(r, \varphi, t)$ gelungen. Die Gl. (VII, 71) entspricht dabei wieder der Gl. (VII, 17).

Aus der Darstellung einer Funktion in der Bessel-Fourier-Reihe kann man ebenso wie bei den Winkelfunktionen ein Fourier-Integral gewinnen. Eine Funktion $f(r)$ wird in der Fourier-Integraldarstellung

$$f(r) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\varrho)\, J_n(\lambda r)\, J_n(\lambda \varrho)\, \lambda \varrho\, d\lambda\, d\varrho, \qquad \text{(VII, 72)}$$

worin ϱ die Integrationsvariable in der r-Dimension ist.

Dieses Fourier-Integral in Besselfunktionen entspricht dem der Gl. (VII, 25). Eine Winkel- und Zeitabhängigkeit haben wir hier fortgelassen.

Zum Schluß geben wir noch einige häufig gebrauchte Formeln über Zylinderfunktionen an.

Zunächst einige Definitionen, die namentlich in der angelsächsischen Literatur gebräuchlich sind.

Die Besselschen Funktionen erster Art mit reellem Argument x werden einheitlich mit $J_n(x)$ bezeichnet. Ist jedoch das Argument imaginär gleich ix mit reellem x, wie es hier bei der Besprechung der Regelstäbe vorkam, so können die $J_n(ix)$ auch komplex werden. Um aber doch zu reellen Funktionen zu gelangen, multipliziert man die $J_n(ix)$ mit i^{-n} und erhält die modifizierten Besselfunktionen

$$I_n(x) = i^{-n} \cdot J_n(ix). \qquad \text{(VII, 73)}$$

Für die Neumannsche Funktion $N_n(x)$ sind in der Literatur mehrere Bezeichnungen gebräuchlich. In Deutschland wird fast immer das $N_n(x)$ verwendet, in den USA meistens

$$Y_n(x) = N_n(x), \qquad \text{(VII, 74)}$$

manchmal jedoch auch $K_n(x)$. Meistens aber wird, wie auch in diesem Buche, der Buchstabe K für die modifizierte Besselfunktion dritter Art benutzt. Die Funktion $K_n(x)$ wird eingeführt, um für die Hankelsche Funktion $H_n^{(1)}(ix)$ mit imaginärem Argument eine reelle Funktion zu erhalten:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\, i^{n+1}\, H_n^{(1)}(ix). \qquad \text{(VII, 75)}$$

Man wählt im Falle imaginärer Argumente für die Besselsche Gleichung

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} - (x^2 + n^2)\, R = 0 \qquad \text{(VII, 76)}$$

meistens die beiden unabhängigen Lösungen in der Form

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) \text{ und } K_n(x) = \frac{\pi}{2}\, i^{n+1}\, H_n^{(1)}(ix). \qquad \text{(VII, 77)}$$

Reihenentwicklungen der Besselfunktion erster Art haben wir für ganzzahlige n bereits in der Gl. (VII, 49) angegeben. Meistens interessieren in der Reaktortechnik die Reihen der Zylinderfunktionen für $n = 0$ und für $n = 1$. Wir schreiben sie deshalb hier noch einmal an:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} - - -, \qquad \text{(VII, 78)}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18432} - - -, \qquad \text{(VII, 79)}$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} - - -, \qquad \text{(VII, 80)}$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18432} - - -, \qquad \text{(VII, 81)}$$

$$N_0(x) = -\,0{,}6366\, ln\, \frac{1{,}1229}{x} \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - - -\right) +$$

$$+ 0{,}6366 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} - - - \right), \qquad \text{(VII, 82)}$$

$$N_1(x) = -\frac{0{,}6366}{x} - 0{,}3183\, ln \frac{1{,}1229}{x} \left(x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{192} - - \right) -$$

$$- 0{,}3183 \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{32} x^3 - - \right), \qquad \text{(VII, 83)}$$

$$K_0(x) = ln \frac{1{,}1229}{x} \left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - - \right) + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{128} - - -, \qquad \text{(VII, 84)}$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} - ln \frac{1{,}1229}{x} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - - \right) -$$

$$- \left(\frac{x}{4} + \frac{5x^3}{64} + \frac{5x^5}{1152} - - \right). \qquad \text{(VII, 85)}$$

Neben diesen Reihenentwicklungen der Zylinderfunktionen in der Nähe des Nullpunktes braucht man häufig das asymptotische Verhalten, d. h. ihren Verlauf für große Argumente x. Im asymptotischen Verhalten der Zylinderfunktion zeigt sich besonders deutlich die Verwandtschaft mit den Winkel- bzw. den Exponentialfunktionen. Es ist für große Werte von x:

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 - \frac{1}{16x^2} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8x} \right), \qquad \text{(VII, 86)}$$

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 + \frac{3}{16x^2} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8x} \right), \qquad \text{(VII, 87)}$$

$$I_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2} \right) e^x, \qquad \text{(VII, 88)}$$

$$I_1(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{3}{8x} - \frac{15}{128x^2} \right) e^x, \qquad \text{(VII, 89)}$$

$$N_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 - \frac{1}{16x^2} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8x} \right), \qquad \text{(VII, 90)}$$

$$N_1(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 + \frac{3}{16x^2} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{8x} \right). \qquad \text{(VII, 91)}$$

$$K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 - \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2} \right) e^{-x}, \tag{VII, 92}$$

$$K_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 + \frac{3}{8x} - \frac{15}{128x^2} \right) e^{-x}, \tag{VII, 93}$$

$$H_0^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 - \frac{1}{16x^2} \right) e^{i\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8x}\right)}, \tag{VII, 94}$$

$$H_0^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 - \frac{1}{16x^2} \right) e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8x}\right)}, \tag{VII, 95}$$

$$H_1^{(1)}(x) \approx -i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 + \frac{3}{16x^2} \right) e^{i\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8x}\right)}, \tag{VII, 96}$$

$$H_1^{(2)}(x) \approx i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(1 + \frac{3}{16x^2} \right) e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8x}\right)}. \tag{VII, 97}$$

$H^{(2)}(x)$ ist die zu $H^{(1)}(x)$ konjugiert komplexe Funktion.

Der relative Fehler dieser asymptotischen Entwicklungen ist für $x \geq 4$ maximal 1 %.

Sehr zweckmäßig ist für viele Rechnungen eine Näherungsdarstellung der Zylinderfunktionen in Winkelfunktionen. Man gewinnt diese Formeln unmittelbar aus den Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen, indem man die Integrale durch Summen annähert. Z. B. wird

$$J_0(x) \approx \frac{1}{4} \left(1 + \cos x + 2 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \tag{VII, 98}$$

$$J_1(x) \approx \frac{1}{4} \left(\sin x + \sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right). \tag{VII, 99}$$

Diese Formeln gelten im Bereich $0 \leq x \leq 3{,}5$ mit einer Genauigkeit von etwa 1 %. Der Fehler steigt mit größer werdendem Argument rasch an und verschwindet mit $x \to 0$.

Durch Differentiation und Integration gehen Zylinderfunktionen in andere Zylinderfunktionen der gleichen Art über. Allgemein gilt:

$$\frac{d Z_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} Z_n + Z_{n-1} = \frac{n}{x} Z_n - Z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(Z_{n-1} - Z_{n+1} \right). \tag{VII, 100}$$

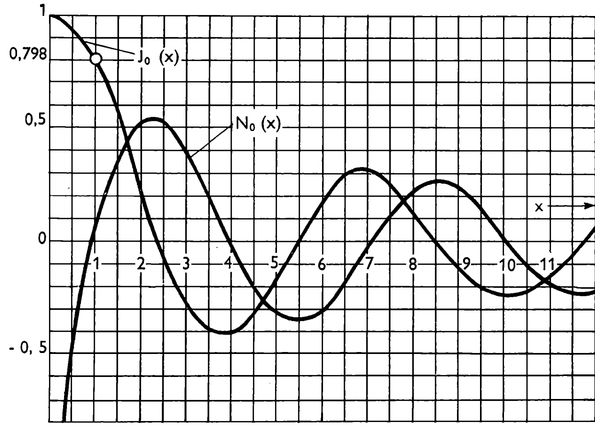


Abb. VII. 3

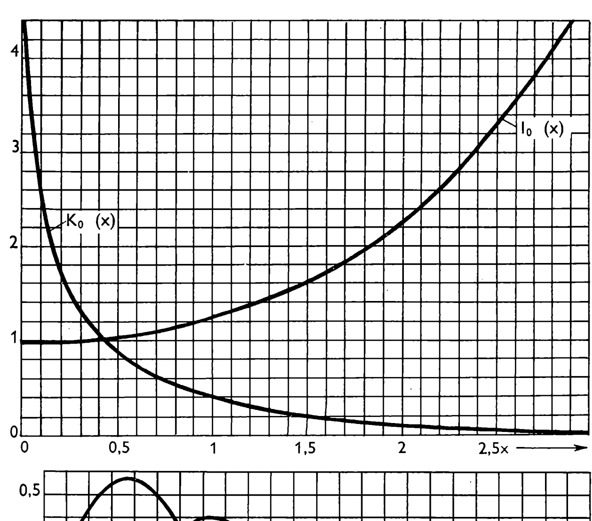


Abb. VII. 4

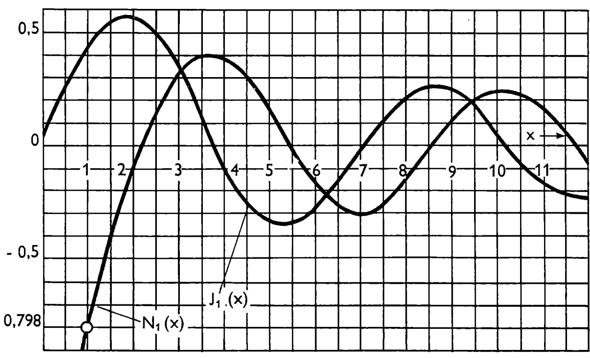


Abb. VII. 5

$$\frac{d}{dx}\left[x^n Z_n(x)\right] = x^n Z_{n-1}(x), \qquad \text{(VII, 101)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} Z_n(x)\right] = -x^{-n} Z_{n+1}(x), \qquad \text{(VII, 102)}$$

$$\int x^{n+1} Z_n(x)\,dx = x^{n+1} Z_{n+1}(x), \qquad \text{(VII, 103)}$$

$$\int x^{-n+1} Z_n(x)\,dx = -x^{-n+1} Z_{n-1}(x), \qquad \text{(VII, 104)}$$

also speziell

$$\frac{d Z_0}{dx} = - Z_1. \qquad \text{(VII, 105)}$$

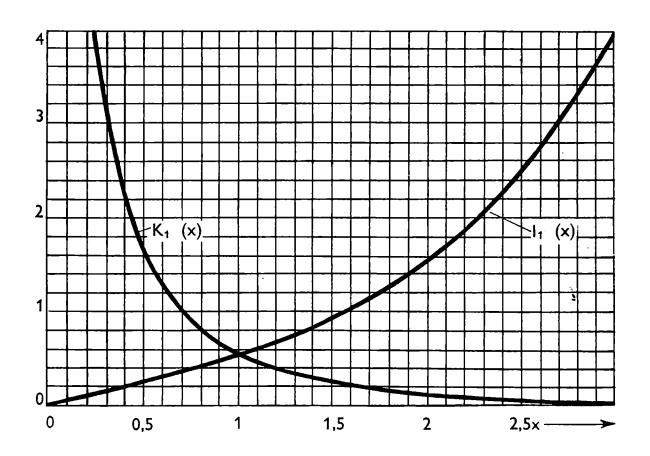


Abb. VII. 6

Die Abbn. VII, 3–6 zeigen die reellen Zylinderfunktionen nullter und erster Ordnung. Auch hier ist die Ähnlichkeit mit den Winkel- bzw. Exponentialfunktionen sichtbar. Die J_n- und N_n-Funktionen sind quasiperiodisch und entsprechen den cos- und sin-Funktionen, während die I_n- und K_n-Funktionen nicht periodisch sind. Die I_n-Funktion ähnelt der Hyperbelfunktion Cos x und die K_n-Funktion der Exponentialfunktion e^{-x}.

3. *Kugelfunktionen*

Mit den Kugelfunktionen brauchen wir uns hier nur kurz zu befassen; denn sie spielen in der Reaktortechnik eine sehr viel geringere Rolle als die Zylinderfunktionen.

Man kann die Kugelfunktionen auf sehr verschiedene Weise ableiten. Z. B. gewinnt man sie auf die gleiche Art, wie wir die Zylinderfunktionen gefunden hatten, indem man die Diffusionsgleichung (VII, 2) nach der Gl. (VI, 63) in Kugelkoordinaten r, φ, ϑ schreibt. Durch mehrfache Produktabspaltungen von Funktionen $R(r)$ und $T(t)$, deren Verlauf hier nicht interessiert, bleibt eine Differentialgleichung für die φ-Abhängigkeit übrig von der Form

$$\frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} + m^2 \Psi = 0 \qquad \text{(VII, 106)}$$

und für die ϑ-Abhängigkeit $\Theta(\vartheta)$:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\vartheta^2} \sin\vartheta + \frac{d\Theta}{d\vartheta} \cos\vartheta + n(n+1)\,\Theta \sin\vartheta - \frac{m^2}{\sin\vartheta}\,\Theta = 0. \qquad \text{(VII, 107)}$$

n ist eine Konstante. m gibt, wie in der Gl. (VII, 40) das n, die Anzahl der Knotenlinien in der azimutalen Richtung φ an. m muß daher gleich null oder eine ganze Zahl sein.

Eine Lösung der Gl. (VII, 106) ist

$$\Psi(\varphi) = e^{im\varphi}. \qquad \text{(VII, 108)}$$

Die Gl. (VII, 107) ist für $m = 0$ und mit der Substitution $\cos\vartheta = x$ und $\Theta(\vartheta) = P(x)$ die Legendresche Gleichung

$$(1 - x^2)\frac{d^2 P(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP}{dx} + n(n+1)\,P(x) = 0. \qquad \text{(VII, 109)}$$

Eine Lösung der Gl. (VII, 109) geben wir, wie im Falle der Besselfunktionen, in der Form einer Potenzreihe an

$$P(x) = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - - -\right] +$$
$$+ a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - - -\right]. \qquad \text{(VII, 110)}$$

Die Koeffizienten dieser Reihe gewinnt man wieder durch die Methode des Koeffizientenvergleichs. a_0 und a_1 sind willkürliche Konstante, so daß die Gl. (VII, 110) die allgemeine Lösung der Legendreschen Gleichung im Konvergenzbereich der Reihe $-1 < x < +1$ ist. Für die übrigen Koeffizienten gilt die Rekursionsformel

$$a_k = -a_{k-2} \frac{(n-k+2)(n+k-1)}{k(k-1)}. \qquad \text{(VII, 111)}$$

Uns interessiert die Reihe (VII, 110) nur für ganzzahlige positive Werte von n. Ist n eine gerade Zahl, so reduziert sich der erste Teil der Reihe (VII. 110) zu einem Polynom, und im Falle eines ungraden n der zweite Teil. Diese Polynome, die man noch so normiert, daß für $x = 1$ auch $P(x) = 1$ wird, sind die Legendreschen Kugelfunktionen P_n:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= x, \\
P_2(x) &= \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}, \qquad \text{(VII, 112)} \\
P_3(x) &= \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x, \\
P_4(x) &= \frac{7 \cdot 5}{4 \cdot 2} x^4 - 2 \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} x^2 + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}, \\
&\vdots \\
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.
\end{aligned}$$

Der Index bei dem P ist jeweils gleich der Zahl n. Man überzeugt sich leicht davon, daß die P_n im Bereich -1 bis $+1$ orthogonal sind:

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu(x) P_n(x) \, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & \text{für } n = \nu \\ 0 & \text{,, } n \neq \nu \end{cases}. \qquad \text{(VII, 113)}$$

Neben den Legendreschen Kugelfunktionen interessieren uns noch die sogenannten zugeordneten Kugelfunktionen. Sie sind die Lösungen der Gl. (VII. 107) für $m \neq 0$.

Durch eine Substitution $\Theta = P^{(m)}(\vartheta) = \sin^m \vartheta \, p^{(m)}(x)$ und $x = \cos \vartheta$ wird aus der Gl. (VII, 107)

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} p^{(m)}(x) - 2(m+1) x \frac{d}{dx} p^{(m)}(x) +$$

$$+ \left[n(n+1) - m(m+1) \right] p^{(m)}(x) = 0. \qquad \text{(VII, 114)}$$

Diese Gleichung geht für $m = 0$ in die Legendresche Gl. (VII, 109) über. Es ist also

$$p^{(0)}(x) = P(x). \qquad \text{(VII, 115)}$$

Differenziert man die Gl. (VII, 114) nach x, so erhält man

$$(1 - x^2)\frac{d^3}{dx^3}\,p^{(m)}(x) - 2(m+2)\,x\,\frac{d^2}{dx^2}\,p^{(m)}(x) +$$

$$+ \Big[n(n+1) - (m+1)(m+2)\Big]\frac{d}{dx}\,p^{(m)}(x) = 0, \qquad \text{(VII, 116)}$$

also wieder eine Gleichung vom Typ der Gl. (VII, 114), nur steht jetzt $d/dx\,p^{(m)}(x)$ für $p^{(m)}(x)$ und $m + 1$ für m. Da aber $p^{(m)}(x)$ die Lösung der Gl. (VII, 114) ist, so folgt, daß $d/dx\,p^{(m)}(x)$ die Lösung der Gl. (VII, 114) mit einem um eins vergrößerten m sein muß. Es ist also

$$p^{(m+1)}(x) = \frac{d}{dx}\,p^{(m)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}\,p^{(m-1)}(x)\ldots\ldots = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\,p^{(0)}(x) \qquad \text{(VII, 117)}$$

und mit der Gl. (VII, 115) und der Definition der Funktion $p^{(m)}(x)$:

$$p^{(m)}(x) = \frac{P_n{}^{(m)}(\vartheta)}{\sin^m\vartheta} = \frac{d^m}{dx^m}\,P_n(x) \qquad \text{(VII, 118)}$$

oder

$$P_n{}^{(m)}(\vartheta) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^m}{dx^m}\,P_n(x). \qquad \text{(VII, 119)}$$

Die $P_n{}^{(m)}(\vartheta)$ sind die zugeordneten Kugelfunktionen. Sie gehen nach der Gl. (VII, 119) aus den Legendreschen Kugelfunktionen hervor. Da nun wieder die Legendreschen Funktionen n-ten Grades nach der letzten der Gl. (VII, 112) aus der Funktion x^2–1 hervorgehen, kann man auch alle zugeordneten Kugelfunktionen aus dieser Funktion (x^2–1) ableiten:

$$P_n{}^{(m)}(\vartheta) = \frac{1}{2^n\,n!}\,(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\,(x^2 - 1)^n. \qquad \text{(VII, 120)}$$

Die Kugelfunktionen spielen bei der Behandlung der Stoßprozesse zwischen Neutronen und Atomkernen eine gewisse Rolle. Außerdem verwendet man sie ihrer bequemen Orthogonalitätseigenschaften wegen gern, um Funktionen durch sie näherungsweise darzustellen. Auf die letztere Anwendungsmöglichkeit kommen wir im nächsten Abschnitt noch einmal zurück.

Will man in der makroskopischen Diffusionstheorie in Kugelkoordinaten rechnen, so kann man genauso vorgehen, wie wir es im Falle der Zylinderfunktionen vorgeführt haben. Wir brauchen das hier nicht zu wiederholen. Lediglich sei die aus der Gl. (VII, 113) entstehende Fourier-Reihendarstellung noch angegeben. Eine Funktion $f(x)$ schreibt sich als Fourier-Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi)\, P_n(\xi)\, P_n(x)\, d\,\xi. \qquad \text{(VII, 121)}$$

VIII. Operatoren und Matrizen

Nach dem, was wir bisher über Operatoren und Matrizen gesagt haben, können wir lediglich auf eine rein formale Verwandtschaft zwischen diesen beiden Dingen schließen. Die Anwendung eines Operators bewirkt ebenso wie die einer Matrix eine Transformation der mathematischen Größe, auf die die Anwendung sich bezieht. Im ersten Falle wird z. B. durch den eindimensionalen Δ-Operator eine Funktion $\Phi(x)$ in eine andere Funktion $\Psi(x)$ transformiert:

$$\Delta\,\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\, x^2} = \Psi(x). \qquad \text{(VIII, 1)}$$

Im zweiten Falle einer Transformation mittels einer Matrix $\mathfrak{D}$ wird, wie in der Gl. (VI, 15), ein Vektor $\mathfrak{a}$ in einen anderen Vektor $\mathfrak{b}$ transformiert:

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}. \qquad \text{(VIII, 2)}$$

Besondere Bedeutung hat, wie wir aus der Diffusionstheorie wissen, die Transformation, die eine Funktion in eine ihr ähnliche, $\Psi = -B^2\,\Phi$, überführt:

$$\Delta\,\Phi + B^2\,\Phi = 0. \qquad \text{(VIII, 3)}$$

Eine ähnliche Bedeutung hat in der Matrizenrechnung die Gleichung:

$$(\mathfrak{D} - \mathfrak{E}\lambda)\,\mathfrak{a} = 0. \qquad \text{(VIII, 4)}$$

$\mathfrak{D}$ ist darin eine, allerdings hier nicht orthogonale, Matrix. Sie hat im allgemeinen gewisse Symmetrieeigenschaften. λ ist, wie auch $-B^2$, eine Konstante.

Um die Analogie zwischen Operatoren und Matrizen auch auf eine solche zwischen Funktionen und Vektoren zu übertragen, vergleichen wir einige Eigenschaften der Funktionen $e^{i\,2\pi n\,x}$, die wir bei den Fourier-Reihen besprochen hatten, mit den entsprechenden Eigenschaften von Vektoren:

In der Gl. (VI, 5) hatten wir einen Vektor in die Komponenten $a_1 \mathfrak{e}_1$; $a_2 \mathfrak{e}_2 \ldots$ aufgeteilt:

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 \ldots + a_n \mathfrak{e}_n. \qquad \text{(VIII, 5)}$$

Eine entsprechende Aufteilung einer Funktion $\Phi(x)$ wurde in der Gl. (VII, 20) in der Form

$$\Phi(x) = \sum_{\nu = -\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i 2\pi \nu x} \qquad \text{(VIII, 6)}$$

vorgenommen. Den Koordinaten $a_1 a_2 \ldots a_n$ entsprechen dabei die Konstanten $c_1 c_2 \ldots$ und den Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_n$ die Funktionen $e^{i 2\pi \nu x}$. Allerdings müßten wir den Vektorenraum, um die Analogie zu vervollständigen, auch unendlich-dimensional machen.

Die Koordinate a_μ des Vektors $\mathfrak{a}$ fanden wir in der Gl. (VI, 7) durch die Multiplikation des Vektors $\mathfrak{a}$ mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{e}_\mu$.

Bei dieser Multiplikation

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_\mu) = \sum_{\nu = 1}^{n} a_\nu (\mathfrak{e}_\nu, \mathfrak{e}_\mu) \qquad \text{(VIII, 7)}$$

blieb wegen der Orthogonalitätsgleichung (VI, 10) auf der rechten Seite nur der Summand

$$a_\mu (\mathfrak{e}_\mu, \mathfrak{e}_\mu) = a_\mu \qquad \text{(VIII, 8)}$$

übrig. Auf ganz ähnliche Weise fanden wir in der Gl. (VIII, 22) die Konstanten c_μ:

$$c_\mu = \int_{(1)} \Phi(\xi)\, e^{-i 2\pi \mu \xi}\, d\,\xi \qquad \text{(VIII, 9)}$$

mit

$$\int_{(1)} e^{i 2\pi \nu \xi} \cdot e^{-i 2\pi \mu \xi}\, d\,\xi = 0 \text{ für } \nu \neq \mu. \qquad \text{(VIII, 10)}$$

Diese Gleichung entspricht der Gl. (VIII, 7), wenn wieder die Funktion Φ dem Vektor $\mathfrak{a}$, die Integration über die Periode 1 der Bildung des inneren Produktes entspricht. Allerdings tritt in diesem Integral jetzt nicht die dem Einheitsvektor $\mathfrak{e}_\mu$ analoge Funktion $e^{i 2\pi \mu \xi}$ auf, sondern die dazu konjugiert komplexe Funktion $e^{-i 2\pi \mu \xi}$.

Schließlich entspricht der Gl. (VI, 8)

$$\mathfrak{a} = \sum_{\nu = 1}^{n} (\mathfrak{a}, \mathfrak{e}_\nu)\, \mathfrak{e}_\nu \qquad \text{(VIII, 11)}$$

die Gl. (VII, 23)

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{(1)} \Phi(\xi)\, e^{i2\pi\nu(x-\xi)}\, d\xi. \qquad \text{(VIII, 12)}$$

Wir sehen also, daß eine weitgehende Analogie besteht zwischen Vektoren und Funktionen. Es wurden deshalb auch die Bezeichnungen aus der Vektorrechnung übernommen. So sagt man z.B.: Die Funktionen $e^{i2\pi\nu x}$ spannen einen Raum auf, den sogenannten Hilbert-Raum; sie sind gemäß der Gl. (VIII, 10) zueinander orthogonal usw. Die gleiche vorherrschende Rolle, die im geometrischen Raum die orthogonalen Vektoren spielen, spielen im Hilbert-Raum die orthogonalen Funktionen.

Der Hauptvorteil der orthogonalen Funktionen wird durch die Orthogonalitätsbedingung Gl. (VIII, 10) selbst gegeben. Das Rechnen mit orthogonalen Funktionen bietet aber noch eine weitere Annehmlichkeit dann, wenn man eine komplizierte Funktion durch eine Schar einfacher Funktionen, z. B. ein Polynom n-ten Grades, annähern will. Die komplizierte Funktion kann dabei in irgendeiner Form gegeben sein, z. B. implizit in einer Differentialgleichung. Man nähert im allgemeinen die Funktion durch das Polynom so an, daß man das Integral über das Quadrat der Differenz zwischen Funktion und Polynom zu einem Minimum macht. Das ist das bekannte Gaußsche Prinzip der kleinsten Quadrate.* Nach diesem Verfahren, das manchmal sehr mühsam ist, bestimmt man die Koeffizienten des Polynoms. Häufig stellt sich danach dann heraus, daß das Polynom n-ten Grades nicht die gewünschte Genauigkeit liefert, und man muß ein Polynom $n + 1$-ten oder höheren Grades wählen. Das bedeutet im allgemeinen, daß man das Verfahren von neuem beginnen muß, weil sich durch die Verwendung des Polynoms $n + 1$-ten Grades auch die für das Polynom n-ten Grades schon bestimmten Koeffizienten ändern. Anders ist es, wenn man orthogonale Funktionen verwendet hat, also etwa an der Stelle des gewöhnlichen Polynoms die Legendreschen Kugelfunktionen Gl. (VII, 112). Dann nämlich ändern sich durch die Hinzunahme einer weiteren $n + 1$-ten Näherung die zuvor bestimmten Koeffizienten nicht.

Das Problem solcher Näherungen tritt in der Reaktortechnik sehr häufig auf, z. B. dann, wenn im Core die Neutronenflußverteilung durch Temperatureffekt oder ungleichmäßigen Abbrand verzerrt wird.

---

*) Vergleicht man dieses Problem der günstigsten Annäherung mit dem entsprech nden im geometrischen Raum, so wird die Analogie zwischen orthogonalen Vektoren und orthogonalen Funktionen besondes deutlich.

Wir gehen jetzt zu den Operatoren und Matrizen über.

Ein Operator, der irgendwelcher Art sein kann, etwa der Δ- oder der ∇-Operator oder auch eine gewöhnliche Zahl usw. werde im folgenden mit $\boldsymbol{L}$ bezeichnet. Durch Anwendung des Operators $\boldsymbol{L}$ auf die Funktion Φ werde die Funktion Ψ gebildet:

$$\boldsymbol{L}\,\Phi(x) = \Psi(x). \qquad \text{(VIII, 13)}$$

Die Funktionen Φ und Ψ mögen durch die orthogonalen Funktionen ψ_ν in der Form

$$\Psi = \sum_\nu b_\nu \psi_\nu, \qquad \text{(VIII, 14)}$$

$$\Phi = \sum_\nu c_\nu \psi_\nu \qquad \text{(VIII, 15)}$$

dargestellt werden. Die Orthogonalitätsbedingung ist, entsprechend der Gl. (VIII, 10)

$$\int \psi_\nu(x) \overset{*}{\psi}_\mu(x)\,dx = 0 \text{ für } \nu \neq \mu \text{ und} = 1 \text{ für } \nu = \mu \qquad \text{(VIII, 16)}$$

Ein Stern bedeutet hier wie auch im folgenden stets den Übergang zur konjugiert komplexen Größe. Den Integrationsbereich, für den die Orthogonalitätsgleichung gilt, haben wir jetzt nicht mehr am Integralzeichen vermerkt, weil er je nach der Art des verwendeten Orthogonalsystems sehr verschieden sein kann. Überhaupt haben wir das ganze Problem jetzt dadurch vereinfacht, daß wir von den drei Raumkoordinaten nur die x-Koordinate betrachten. Durch die Hinzunahme der übrigen Koordinaten entstehen keine zusätzlichen Schwierigkeiten.

Unser Ziel ist jetzt, die Transformation, die der Operator $\boldsymbol{L}$ mit der Funktion $\Phi(x)$ vornimmt, als eine Transformation der „Koordinaten" b_ν in die Koordination c_ν zu beschreiben. Wir wenden dazu den Operator $\boldsymbol{L}$ auf die Gl. (VIII, 15) an und setzen dann die Gln. (VIII, 13 und 15) ein.

$$\boldsymbol{L}\,\Phi = \Psi = \sum_{(\nu)} c_\nu \boldsymbol{L}\,\psi_\nu = \sum_{(\nu)} b_\nu \psi_\nu. \qquad \text{(VIII, 17)}$$

Multiplizieren wir nun diese Gleichung mit $\overset{*}{\psi}_\mu$ und integrieren über den Orthogonalitätsbereich, so wird wegen der Orthogonalität der ψ_ν Gl. (VIII, 16):

$$b_\mu = \sum_{(\nu)} c_\nu \int \overset{*}{\psi}_\mu \boldsymbol{L}\,\psi_\nu\,dx. \qquad \text{(VIII, 18)}$$

Das Integral in der Gl. (VIII, 18) ist eine jeweils von μ und ν abhängige Konstante:

$$\int \overset{*}{\psi_\mu} \, L \, \psi_\nu \, dx = L_{\mu\nu}, \tag{VIII, 19}$$

so daß wir die Gl. (VIII, 18) schreiben können

$$b_\mu = \sum_\nu L_{\mu\nu} \, c_\nu. \tag{VIII, 20}$$

Ein Vergleich mit der Gl. (VI, 18) zeigt, daß die $L_{\mu\nu}$ als Matrixelemente einer Matrix $\mathfrak{L}$ aufzufassen sind, die einen Vektor

$$\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{VIII, 21}$$

in einen anderen Vektor

$$\mathfrak{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{VIII, 22}$$

transformiert. Zwar geht im allgemeinen die Indizierung der Vektorkomponenten von $-\infty$ bis $+\infty$, hier aber in der Reaktortechnik, hat man meistens nur mit endlich vielen Komponenten zu rechnen, die man dann auch von 1 bis n numerieren kann. Die Gl. (VIII, 20) lautet also in Matrizen geschrieben

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{L} \, \mathfrak{c}. \tag{VIII, 23}$$

Damit ist die Analogie zwischen Operatoren und Matrizen, die wir bisher nur als formal erkennen konnten, auch sachlich nachgewiesen. Die Transformation einer Funktion Φ in eine andere Funktion Ψ durch den Operator $\boldsymbol{L}$ ist gleichbedeutend mit der Transformation der Komponenten c_ν von Φ in die Komponenten b_ν von Ψ durch die Matrix $\mathfrak{L}$. Die Verknüpfungsgleichung zwischen diesen beiden Transformationen ist die Gl. (VIII, 19).

Wir betrachten nun die einfachsten sogenannten Eigenwertprobleme. Das sind Differentialgleichungen von der Art der Diffusionsgleichung (VIII, 3), bei denen die Transformation einer Funktion durch einen

Operator $\boldsymbol{L}$ zu einer anderen Funktion führt, die der ursprünglichen Funktion proportional ist, z. B.

$$\boldsymbol{L}\,\varphi_\nu = \lambda_\nu\,\varphi_\nu. \qquad \text{(VIII, 24)}$$

Ein derartiges Eigenwertproblem haben wir bereits im Abschnitt VII behandelt; denn betrachten wir dort die Lösung Gl. (VII, 19)

$$\Phi\,(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu\, e^{i 2\pi\nu x} \cdot e^{-a\,(\nu^2 \cdot 4\pi^2 - B^2)\,t} \qquad \text{(VIII, 25)}$$

der Diffusionsgleichung (VII, 3)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B^2\,\Phi = \frac{1}{a}\,\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad \text{(VIII, 26)}$$

so stellen wir fest, daß nicht nur die Summe (VIII, 25) die Gl. (VIII, 26) erfüllt, sondern auch jeder einzelne Summand. Wir können nun

$$e^{i 2\pi\nu x} = \varphi_\nu \qquad \text{(VIII, 27)}$$

setzen und erhalten durch Einsetzen des ν-ten Summanden in die Gl. (VIII, 26)

$$\frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x^2} + B^2\,\varphi_\nu = (B^2 - 4\,\pi^2\,\nu^2)\,\varphi_\nu. \qquad \text{(VIII, 28)}$$

Das ist die Gl. (VIII, 24), wenn wir

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B^2 \text{ und } \lambda_\nu = (B^2 - 4\,\pi^2\,\nu^2) \qquad \text{(VIII, 29)}$$

setzen. Die Funktionen (VIII, 27) sind in diesem Beispiel der harmonischen Exponenten, wie wir aus der Gl. (VIII, 10) wissen, orthogonal. Das muß jedoch keineswegs immer so sein. Z. B. liegen die Exponenten der den Funktionen $e^{i 2\pi\nu x}$ entsprechenden Winkelfunktionen nicht harmonisch, wenn man in einem Reaktor mit Reflektor rechnet oder Wärmeleitungsprobleme in mehreren in der Wärmeleitfähigkeit verschiedenen Schichten behandelt. Die φ_ν bilden dann kein Orthogonalsystem. Zunächst aber wollen wir die Orthogonalität der sogenannten Eigenfunktionen φ_ν der Gl. (VIII, 24) noch voraussetzen und eine wichtige Eigenschaft des Operators $\boldsymbol{L}$ aus der Orthogonalität der Eigenfunktionen folgern.

Dazu bilden wir zu einer anderen Eigenwertgleichung – es gibt ja, wie das obige Beispiel zeigt, neben der Gl. (VIII, 24) zum gleichen Eigenwertproblem mehrere, im allgemeinen unendlich viele Eigenwertgleichungen – die konjugiert komplexen Werte:

$$\overset{*}{L}\,\overset{*}{\varphi}_\mu = \lambda_\mu\,\overset{*}{\varphi}_\mu\,. \qquad \text{(VIII, 30)}$$

Der Stern kennzeichnet wieder den Übergang zum konjugiert Komplexen. Die Eigenwerte λ_μ haben wir reell gewählt. Multiplizieren wir jetzt die Gl. (VIII, 24) mit φ^*_μ, die Gl. (VIII, 30) mit φ_ν, subtrahieren dann beide Gleichungen voneinander und integrieren über den Orthogonalitätsbereich der φ_ν, so erhalten wir:

$$\int \overset{*}{\varphi}_\mu\, L\, \varphi_\nu\, dx - \int \varphi_\nu\, \overset{*}{L}\, \overset{*}{\varphi}_\mu\, dx = (\lambda_\nu - \lambda_\mu) \int \overset{*}{\varphi}_\mu\, \varphi_\nu\, dx = 0.$$

Die rechte Seite verschwindet für $\mu \neq \nu$ wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen φ, und für $\nu = \mu$, weil wir die Eigenwerte reell gewählt haben. Es ist also in jedem Falle

$$\int \overset{*}{\varphi}_\mu L\, \varphi_\nu\, dx = \int \varphi_\nu\, \overset{*}{L}\, \overset{*}{\varphi}_\mu\, dx. \qquad \text{(VIII, 31)}$$

Man nennt einen Operator L, der der Gl. (VIII, 31) genügt, einen selbstadjungierten oder hermiteschen Operator.

Die Eigenschaft der Hermitizität eines Operators L ist in dem Falle, daß die φ_ν Eigenfunktionen zu L sind, mit der Orthogonalität der φ_ν gekoppelt*. Ist nun aber ein Eigenwertproblem so gestaltet, daß die Eigenfunktionen φ_ν nicht orthogonal sind, so ist es zweckmäßig, das Problem dennoch mit Hilfe orthogonaler Funktionen zu behandeln.

Wir konstruieren zu dem Zwecke ein Funktionssystem $\overset{\dagger}{\varphi}_\nu$, das erstens die Eigenschaft hat, zu dem Eigenfunktionssystem φ_ν orthogonal zu sein, so daß

$$\int \overset{*}{\varphi}_\nu \cdot \overset{\dagger}{\varphi}_\mu = 0 \text{ für } \mu \neq \nu \qquad \text{(VIII, 32)}$$

---

*) Das gilt jedoch nur, wenn die Funktionen φ_ν Eigenfunktionen zum Operator L sind. Die Hermitizität eines Operators ist auch dann durch die Gl. (VIII, 32) definiert, wenn die φ_ν nicht Eigenfunktionen sondern willkürliche Funktionen sind, die nur gewisse Bedingungen erfüllen. Z. B. müssen sie quadratisch integrierbar sein. Sie selbst oder ihre Ableitungen müssen am Rande des Integrationsbereiches verschwinden usw. So ist z. B. der Δ-Operator, wie man aus der Greenschen Formel sieht, ein hermitescher Operator, der ∇-Operator jedoch nicht, wohl aber der Operator $i \cdot \nabla$.

ist, und zweitens einem System von Eigenwertgleichungen:

$$\overset{\dagger}{L}\,\overset{\dagger}{\varphi}_\mu = \overset{*}{\lambda}_\mu\,\overset{\dagger}{\varphi}_\mu \tag{VIII, 33}$$

genügt.

Hier lassen wir jetzt zu, daß die Eigenwerte λ_μ der Gl. (VIII, 24) komplex sind. (Allerdings ist das meistens nicht der Fall.) Die Eigenwerte der Gl. (VIII, 33) wählen wir konjugiert komplex zu denen der Gl. (VIII, 24). Durch die gleichen Operationen wie vorhin gewinnen wir jetzt aus den Gln. (VIII, 24 und 33)

$$\int \overset{\dagger *}{\varphi}_\mu\, L\, \varphi_\nu\, dx - \int \varphi_\nu\, \overset{\dagger *}{L}\, \overset{\dagger *}{\varphi}_\mu\, dx = (\lambda_\nu - \lambda_\mu) \int \overset{\dagger *}{\varphi}_\mu\, \varphi_\nu\, dx. \tag{VIII, 34}$$

Wieder verschwindet die rechte Seite für $\mu \neq \nu$ wegen der Orthogonalitätsbedingung Gl. (VIII, 32) und für $\mu = \nu$, weil wir die Eigenwerte der Gl. (VIII, 33) konjugiert komplex zu denen der Gl. (VIII, 24) gewählt hatten.

In jedem Falle ist also wieder

$$\int \overset{\dagger *}{\varphi}_\mu\, L\, \varphi_\nu dx = \int \varphi_\nu\, \overset{\dagger *}{L}\, \overset{\dagger *}{\varphi}_\mu\, dx. \tag{VIII, 35}$$

Natürlich geht diese Gleichung dann in die Gl. (VIII, 31) über, wenn die $\overset{\dagger}{\varphi}_\nu$ mit den φ_ν übereinstimmen, wenn also die φ_ν unter sich ein Orthogonalsystem bilden. Dann ist auch der Operator $L = \overset{\dagger}{L}$ selbstadjungiert. Ist das aber nicht der Fall, so heißt $\overset{\dagger}{L}$ der zu L adjungierte Operator.

Wir gehen nun wieder von den Operatoren zu den Matrizen über.

Zunächst stellen wir fest, daß das Eigenwertproblem (VIII, 24) entsprechend der Gl. (VIII, 23) in der Matrixschreibweise lautet:

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\lambda, \tag{VIII, 36}$$

denn setzen wir in der Gl. (VIII, 13) und (VIII, 15) $\Psi = \lambda\Phi$, so wird, wie der Vergleich mit der Gl. (VIII, 14) zeigt, $b_\nu = \lambda c_\nu$, d. h. $\mathfrak{b} = \lambda\mathfrak{c}$. Aus der Gl. (VIII, 23) folgt dann die Gl. (VIII, 36).

Dem λ in der Gl. (VIII, 36) haben wir keinen Index gegeben. Das liegt daran, daß diese Gleichung für alle Werte λ_ν gilt; denn schreiben wir die Gl. (VIII, 36) in der Form

$$(\mathfrak{L} - \mathfrak{E}\lambda)\mathfrak{c} = 0. \qquad \text{(VIII, 37)}$$

so ist dieses homogene Gleichungssystem nur lösbar, wenn die Determinante der Matrix $(\mathfrak{L} - \lambda\mathfrak{E})$

$$|\,\mathfrak{L} - \lambda\mathfrak{E}\,| \qquad \text{(VIII, 38)}$$

verschwindet. $\mathfrak{E}$ ist die Einheitsmatrix. Diese Determinante läßt sich in der Form eines Polynoms schreiben:

$$\lambda^n - \left[L_{11} + L_{22} \ldots + L_{nn}\right]\lambda^{n-1} + \left[\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_{22} & L_{23} \\ L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \ldots\right]\lambda^{n-2} + \ldots$$

$$+ (-1)^n\,|\mathfrak{L}| = 0 \qquad \text{(VIII, 39)}$$

mit

$$|\mathfrak{L}| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ L_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ L_{n1} & & \ldots & L_{nn} \end{vmatrix}. \qquad \text{(VIII, 40)}$$

Wir haben dabei angenommen, daß wir mit n Eigenfunktionen rechnen. Das Polynom Gl. (VIII, 39) hat auch n Lösungen λ_ν. Für jeden dieser n Eigenwerte λ_ν ist die Gl. (VIII, 37) lösbar, und die n Lösungen entsprechen den Eigenfunktionen φ_ν der Gl. (VIII, 24). Die zu dem Eigenwert λ_ν gehörende Lösung $\mathfrak{c}_\nu$ der Gl. (VIII, 37) nennt man den Eigenvektor $\mathfrak{c}_\nu$. Es gibt also zu den n Eigenwerten λ_ν auch n verschiedene Eigenvektoren $\mathfrak{c}_\nu$.

Wir haben damit das in der Gl. (VIII, 24) in Funktionen und Operatoren geschriebene Eigenwertproblem vollständig in die Matrixschreibweise übertragen. Dem Operator $\boldsymbol{L}$ entspricht die Matrix $\mathfrak{L}$, die n Eigenwerte λ_ν entsprechen sich selbst, und den Eigenfunktionen φ_ν entsprechen die Eigenvektoren $\mathfrak{c}_\nu$.

Richtet man das Problem so ein, daß die Eigenfunktionen φ_ν mit den ψ_ν der Gl. (VIII, 15) zusammenfallen, so wird die Matrix besonders einfach, sie besteht dann nur aus den Diagonalelementen $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_n$. Die Eigenvektoren $\mathfrak{c}_\nu$ enthalten jeweils nur eine Komponente. Man nennt diesen Sonderfall die Hauptachsendarstellung.

Man kann leicht die Eigenschaften der Operatoren und Eigenfunktionen auch auf entsprechende Eigenschaften der Matrizen und Eigenvektoren übertragen. Z. B. können wir eine zur Matrix $\boldsymbol{L}$ adjungierte Matrix $\overset{\dagger}{\boldsymbol{L}}$ konstruieren usw.

Zunächst einmal zeigt sich, daß die Eigenvektoren $\mathfrak{c}_\nu$ aufeinander senkrecht stehen, wenn die entsprechenden Eigenfunktionen φ_ν orthogonal sind. Das folgt unmittelbar aus der Gl. (VIII, 15):

Sind φ_p und φ_m zwei orthogonale Funktionen

$$\varphi_p = \sum c_{p\nu}\,\psi_\nu \text{ und } \varphi_m = \sum c_{m\nu}\,\psi_\nu, \qquad \text{(VIII, 41)}$$

so ist, weil auch die ψ_ν orthogonal sind,

$$\int \overset{*}{\varphi}_p\,\varphi_m dx = 0 = \int \left(\sum_{(\nu)} \overset{*}{c}_{p\nu}\,\overset{*}{\psi}_\nu\right)\left(\sum_{(\nu)} c_{m\nu}\,\psi_\nu\right) dx = \qquad \text{(VIII, 42)}$$

$$= \overset{*}{c}_{p1}\,c_{m1} + \overset{*}{c}_{p2}\,c_{m2} \ldots + \overset{*}{c}_{pn}\,c_{mn}$$

oder in Matrizen geschrieben:

$$\mathfrak{c}_p^{*\prime}\,\mathfrak{c}_m = 0. \qquad \text{(VIII, 43)}$$

Das ist die Orthogonalitätsbedingung Gl. (VI, 12) für Vektoren, nur mit dem Unterschied, daß die Vektoren hier komplexe Komponenten haben. (Der Strich kennzeichnet die transponierte Matrix.)

Im Falle eines hermiteschen Operators $\boldsymbol{L}$ sind demnach die Eigenvektoren der Matrix $\mathfrak{L}$ orthogonal. Dann heißt auch die Matrix $\mathfrak{L}$ hermitesch. Die Eigenschaft einer hermiteschen Matrix folgt mit der Gl. (VIII, 19) aus der Definitionsgleichung für einen hermiteschen Operator Gl. (VIII, 31); denn ist

$$\mathrm{L}_{\mu\nu} = \int \overset{*}{\psi}_\mu\,\boldsymbol{L}\,\psi_\nu, dx, \qquad \text{(VIII, 44)}$$

so wird das, wenn man die Indizes μ und ν, also in der Matrix Spalten und Zeilen vertauscht und dann den konjugiert komplexen Wert bildet,

$$\overset{*}{\mathrm{L}}_{\nu\mu} = \int \psi_\nu\,\overset{*}{\boldsymbol{L}}\,\overset{*}{\psi}_\mu dx, \qquad \text{(VIII, 45)}$$

und das ist nach der Gl. (VIII, 31) wieder

$$\int \psi_\nu\,\overset{*}{\boldsymbol{L}}\,\overset{*}{\psi}_\mu\,dx = \int \overset{*}{\psi}_\mu\,\boldsymbol{L}\,\psi_\nu dx, \qquad \text{(VIII, 46)}$$

so daß für die hermitesche Matrix gilt:

$$\overset{*}{L}_{\mu\nu} = L_{\nu\mu},$$

d. h. $$\overset{*}{\mathfrak{L}}' = \mathfrak{L}.$$

Durch Bildung der konjugiert komplexen Matrix und Vertauschen von Spalten und Zeilen geht die hermitesche Matrix in sich selbst über.

Für den Fall nichtorthogonaler Eigenfunktionen bzw. -vektoren wollen wir auch die Bildung einer adjungierten Matrix $\mathfrak{L}^{\dagger}$ mit Hilfe der Eigenvektoren vorführen:

Wir gehen von der Gl. (VIII, 36) aus, die wir für den Eigenvektor $\mathfrak{c}_\nu$ noch einmal anschreiben:

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{c}_\nu = \lambda_\nu\,\mathfrak{c}_\nu. \tag{VIII, 47}$$

Wieder wählen wir ein System zu den $\mathfrak{c}_\nu$ orthogonaler Vektoren $\overset{*\dagger}{\mathfrak{c}}_\mu$ die zur Matrix $\mathfrak{L}^{\dagger}$ die Eigenwertgleichungen

$$\overset{\dagger}{\mathfrak{L}}\,\overset{\dagger}{\mathfrak{c}}_\mu = \overset{*}{\lambda}_\mu\,\overset{\dagger}{\mathfrak{c}}_\mu \tag{VIII, 48}$$

bilden. Zur Gl. (VIII, 48) bilden wir die konjugiert komplexe Gleichung, multiplizieren die Gl. (VIII, 47) vorne mit $\overset{\dagger *\prime}{\mathfrak{c}_\mu}$, die Gl. (VIII, 48) mit $\mathfrak{c}'_\nu$ und subtrahieren beide Gleichungen voneinander:

$$\overset{\dagger *\prime}{\mathfrak{c}_\mu}\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{c}_\nu - \mathfrak{c}'_\nu\,\overset{\dagger *}{\mathfrak{L}}\,\overset{\dagger *}{\mathfrak{c}_\mu} = (\lambda_\nu - \lambda_\mu)\,\overset{\dagger *\prime}{\mathfrak{c}_\mu}\,\mathfrak{c}_\nu = 0. \tag{VIII, 49}$$

$\mathfrak{c}'$ ist darin wieder die zu $\mathfrak{c}$ transponierte Matrix. Die Gl. (VIII, 49) gilt wieder für alle μ und ν. Sie ist die Bedingungsgleichung für die Adjungiertheit der Matrizen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^{\dagger}$:

$$\overset{\dagger *\prime}{\mathfrak{c}_\mu}\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{c}'_\nu\,\overset{\dagger *}{\mathfrak{L}}\,\overset{\dagger *}{\mathfrak{c}_\mu}. \tag{VIII, 50}$$

Die Gl. (VIII, 50) entspricht der Gl. (VIII, 35).

Die Berechnung der zu den $\mathfrak{c}_\nu$ adjungierten Vektoren $\overset{\dagger}{\mathfrak{c}}_\nu$ geht über die Matrix $\mathfrak{L}^{\dagger *}$. Wir müssen also zunächst angeben, wie man die Matrix $\mathfrak{L}^{\dagger *}$ aus $\mathfrak{L}$ gewinnt.

Das Produkt $\overset{\dagger *\prime}{\mathfrak{c}_\mu}\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{c}_\nu$ ist eine Matrix, die nur aus einem einzigen Element besteht. Die Transponierte eines Elementes ist aber gleich dem Element selbst. Es ist also

$$\overset{\dagger *'}{\mathfrak{c}_\mu} \, \mathfrak{L} \, \mathfrak{c}_\nu = \left(\overset{\dagger *'}{\mathfrak{c}_\mu} \, \mathfrak{L} \, \mathfrak{c}_\nu \right)' = \mathfrak{c}'_\nu \, \mathfrak{L}' \, \overset{\dagger *}{\mathfrak{c}_\mu}, \qquad \text{(VIII, 51)}$$

und damit folgt aus den Gln. (VIII, 50 und 51):

$$\mathfrak{c}'_\nu \left(\overset{\dagger *}{\mathfrak{L}} - \mathfrak{L}' \right) \overset{\dagger *}{\mathfrak{c}_\nu} = 0. \qquad \text{(VIII, 52)}$$

Diese Gleichung ist jedenfalls erfüllt, wenn

$$\overset{\dagger}{\mathfrak{L}} = \overset{*'}{\mathfrak{L}} \qquad \text{(VIII, 53)}$$

ist. Wir finden demnach die zu $\mathfrak{L}$ adjungierte Matrix $\overset{\dagger}{\mathfrak{L}}$, indem wir zu den Elementen von $\mathfrak{L}$ die konjugiert komplexen Werte nehmen und dann Zeilen und Spalten miteinander vertauschen.

Die Eigenvektoren $\overset{\dagger}{\mathfrak{c}_\nu}$ erhält man dann durch Auflösung der homogenen Gleichungssysteme (VIII, 48).

Wir haben in den vergangenen Abschnitten und besonders in diesem die Analogie zwischen Vektoren und Funktionen und zwischen Matrizen und Operatoren so stark betont, weil wir glauben, daß die gemeinsame Systematik das Verständnis erleichtert. Es könnte nun durch unsere Darstellung der Eindruck entstanden sein, daß die in diesem Abschnitt gezeigten Rechenoperationen für Matrizen nur im Zusammenhang mit Operatoren und Eigenwertgleichungen eine Rolle spielen. Das ist, namentlich in der Reaktorphysik, nicht immer so. Zwar kommt es vor, daß man Eigenwertprobleme mit Hilfe von Matrizen behandelt, z. B. dann, wenn der Operator so geartet ist, daß die Eigenfunktionen kompliziert werden, und man diese Funktionen durch ein einfacheres Orthogonalsystem annähern will usw., aber im allgemeinen liegt der Anwendungsbereich der Matrizen in der Reaktorphysik bei der Mehrgruppentheorie, den Systemen von Differentialgleichungen, Neutronendiffusions- und Wärmeleitungsproblemen usw.

Wir wollen eine der Anwendungsmöglichkeiten, eine Störungsrechnung, kurz besprechen und gehen dazu aus von der Gl. (VIII, 24), die wir jetzt allgemein in der Form

$$\mathfrak{L} \, \Phi = \lambda \, \Phi \qquad \text{(VIII, 54)}$$

schreiben wollen. $\mathfrak{L}$ kann darin ein Operator oder auch eine Matrix sein. Ist $\mathfrak{L}$ ein Operator, so ist Φ eine Funktion und ist $\mathfrak{L}$ eine Matrix, so ist Φ ein Spaltenvektor. λ ist eine Konstante.

Wir nehmen nun an, die linke Seite der Gl. (VIII, 54) ändere sich von einem bestimmten Zeitpunkt an ein wenig, sagen wir um die Größe $\mathfrak{P} \cdot \Phi$, worin $\mathfrak{P}$ wieder ein Operator (bzw. eine Matrix) ist, die auf die gleiche Funktion (oder den Vektor) Φ wirkt, wie $\mathfrak{L}$. Die gestörte linke Seite der Gl. (VIII, 54) bewirkt auf der rechten Seite eine entsprechende Änderung $\delta \lambda \cdot \Phi$. $\delta \lambda$ soll klein sein gegenüber λ. Die gestörte Gleichung lautet dann:

$$(\mathfrak{L} + \mathfrak{P})\,\Phi = (\lambda + \delta\lambda)\,\Phi. \qquad \text{(VIII, 55)}$$

Φ soll sich durch die Störung nicht wesentlich geändert haben.

Im allgemeinen wird $\mathfrak{L}$ kein hermitescher Operator (Matrix) sein. Wir bilden daher die zu $\mathfrak{L}$ adjungierte $\overset{\dagger}{\mathfrak{L}}$ und die entsprechende adjungierte Funktion (Vektor) $\overset{\dagger}{\Phi}$. Es ist also

$$\overset{\dagger}{\mathfrak{L}}\,\overset{\dagger}{\Phi} = \overset{*}{\lambda}\,\overset{\dagger}{\Phi} \qquad \text{(VIII, 56)}$$

oder, konjugiert komplex genommen,

$$\overset{\dagger *}{\mathfrak{L}}\,\overset{\dagger *}{\Phi} = \lambda\,\overset{\dagger *}{\Phi}. \qquad \text{(VIII, 57)}$$

Multipliziert man nun im Falle, daß $\mathfrak{L}$ ein Operator ist, die Gl. (VIII, 55) vorne mit $\overset{\dagger *}{\Phi}$, die Gl. (VIII, 56) vorne mit Φ, subtrahiert dann beide Gleichungen voneinander und integriert über den Orthogonalitätsbereich, so erhält man:

$$\int \overset{\dagger *}{\Phi}\,\mathfrak{L}\,\Phi\,dx - \int \Phi\,\overset{\dagger *}{\mathfrak{L}}\,\overset{\dagger *}{\Phi}\,dx + \int \overset{\dagger *}{\Phi}\,\mathfrak{P}\,\Phi\,dx = \delta\lambda \int \overset{\dagger *}{\Phi}\,\Phi\,dx. \qquad \text{(VIII, 58)}$$

Die ersten beiden Summanden heben sich wegen der Adjungiertheit von $\mathfrak{L}$ und $\overset{\dagger}{\mathfrak{L}}$ entsprechend der Gl. (VIII, 35) auf.

Es ist demnach

$$\delta\lambda = \frac{\int \overset{\dagger *}{\Phi}\,\mathfrak{P}\,\Phi\,dx}{\int \overset{\dagger *}{\Phi}\,\Phi\,dx}. \qquad \text{(VIII, 59)}$$

Das gilt, wenn $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{P}$ einfache Operatoren sind. Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{P}$ Matrizen, so erhält man entsprechend

$$\delta\lambda = \frac{\overset{\dagger*'}{\Phi}\ \mathfrak{P}\,\Phi}{\overset{\dagger*'}{\Phi}\ \Phi}. \tag{VIII, 60}$$

Im ersten Beispiel, das wir hierzu bringen wollen, soll $\mathfrak{L}$ ein einfacher Operator sein und zwar wie in der Gl. (VIII, 29)

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial}{\partial x^2} + B^2 \tag{VIII, 61}$$

zu der Eigenwertgleichung (VIII, 28):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + B^2 \Phi = (B^2 - 4\pi^2)\,\Phi = \lambda\Phi, \tag{VIII, 62}$$

in der wir jetzt nur den Fall $\nu = 1$ betrachten.

Im stationären Falle ist $B^2 = 4\pi^2$ und $\lambda = 0$. Wird aber der zunächst im stationären Betrieb befindliche Reaktor etwa dadurch gestört, daß der materielle Krümmungsfaktor B^2 sich ein wenig, um die Größe δB, ändert, d. h.

$$\mathbf{P} = \delta B^2, \tag{VIII, 63}$$

so ist die entsprechende Änderung von λ nach der Gl. (VIII, 59):

$$\delta\lambda = \frac{\int \overset{\dagger*}{\Phi}\ \delta B^2\,\Phi\,dx}{\int \overset{\dagger*}{\Phi}\,\Phi dx}. \tag{VIII, 64}$$

Die Integrale sind über eine Kantenlänge des Reaktorcores zu erstrekken.

In diesem Falle ist der Operator δB^2 als Zahl sicher hermitesch, und außerdem soll Φ eine reelle Funktion sein. Damit wird

$$\delta\lambda = \frac{\int \delta B^2(x)\,\Phi^2\,dx}{\int \Phi^2\,dx}. \tag{VIII, 65}$$

Ist die Änderung δB^2 im ganzen Core konstant, so erhält man das triviale Ergebnis $\delta\lambda = \delta B^2$. Ist δB^2 in einzelnen Bereichen des Cores konstant, so erhält man die gleichen Formeln, die wir im Abschnitt III Bd. I, für den stationären Reaktor abgeleitet hatten; denn die Bedingung der

Stationarität lautet hier $\delta\lambda = 0$, und die Gl. (VIII, 65) geht damit – nach entsprechender Änderung der Bezeichnungen – in die Gl. (III, 5) des Bds. I über.

Im nichtstationären Falle gibt die Gl. (VIII, 65) an, mit welcher Zeitkonstanten $\delta\lambda$ der Neutronenfluß im Reaktor nach der Änderung des Krümmungsfaktors ansteigt bzw. abklingt; denn die Lösung der gestörten Diffusionsgleichung ist nach der Gl. (VII, 10) mit $n = 1$ und $x_1 = 1/2$

$$\Phi = A \cos 2\pi x \, e^{-a \cdot \delta\lambda \cdot t}. \tag{VIII, 66}$$

Im zweiten Beispiel, das wir kurz besprechen wollen, ist $\mathfrak{L}$ eine Matrix. Wir gehen aus von den Gln. (V, 13 und 14) des Bds. I, die das Verhalten eines Reaktors mit Reflektor nach der Zweigruppentheorie beschreiben. Allerdings erweitern wir diese Gleichungen, indem wir sie entsprechend der Gl. (VIII, 62) für den instationären Fall aufschreiben:

$$\Delta \Phi^s - \frac{\Sigma^s}{D^s} \Phi^s + \frac{k_\infty \Sigma^{th}}{D^s} \Phi^{th} = \lambda \Phi^s \tag{VIII, 67}$$

$$\Delta \Phi^{th} - \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}} \Phi^{th} + \frac{\Sigma^s}{D^{th}} \Phi^s = \lambda \Phi^{th}. \tag{VIII, 68}$$

In Matrixform geschrieben ist das

$$\left| \begin{matrix} \left(\Delta - \frac{\Sigma^s}{D^s}\right) & \frac{k_\infty \Sigma^{th}}{D^s} \\ \frac{\Sigma^s}{D^{th}} & \left(\Delta - \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}}\right) \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \Phi^s \\ \Phi^{th} \end{matrix} \right| = \lambda \left| \begin{matrix} \Phi^s \\ \Phi^{th} \end{matrix} \right|. \tag{VIII, 69}$$

Die Bezeichnungen sind die gleichen wie im Abschnitt V, Bd. I. Die Größe, die hier wieder, wie in der Gl. (VIII, 62), ein Maß für die Änderungsgeschwindigkeit der Neutronenflüsse Φ^s und Φ^{th} ist, und im stationären Falle verschwindet, tritt hier als Eigenwert zur Matrix

$$\mathfrak{L} = \left| \begin{matrix} \left(\Delta - \frac{\Sigma^s}{D^s}\right) & \frac{k_\infty \Sigma^{th}}{D^s} \\ \frac{\Sigma^s}{D^{th}} & \left(\Delta - \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}}\right) \end{matrix} \right| \tag{VIII, 70}$$

auf. Die Matrixelemente sind jetzt teilweise Operatoren.

Der Reaktor, dessen Verhalten durch die Gl. (VIII, 69) beschrieben wird, möge wieder zunächst bis zu einem bestimmten Zeitpunkt stationär laufen (d. h. $\lambda = 0$). In diesem Zeitpunkt möge sich der Vermehrungsfaktor k_∞ ein wenig, um den Betrag δk_∞, ändern. Wir schreiben dementsprechend die Störungsmatrix:

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Sigma^{th}}{D^s}\,\delta\, k_\infty \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{VIII, 71}$$

Um nun mit der Gl. (VIII, 60) die Zeitkonstante $\delta\lambda$ zu berechnen, benötigen wir noch den zu

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^s \\ \Phi^{th} \end{pmatrix} \tag{VIII, 72}$$

adjungierten Vektor $\Phi^\dagger$ und, um diesen wieder zu gewinnen, die zu $\mathfrak{L}$ adjungierte Matrix $\mathfrak{L}^\dagger$. $\mathfrak{L}$ enthält nur reelle Elemente, so daß $\mathfrak{L}^\dagger$ nach der Gl. (VIII, 53) einfach durch Vertauschen von Zeilen mit Spalten aus $\mathfrak{L}$ entsteht:

$$\mathfrak{L}^\dagger = \begin{vmatrix} \left(\Delta - \frac{\Sigma^s}{D^s}\right) & \frac{\Sigma^s}{D^{th}} \\ \frac{k_\infty \Sigma^{th}}{D^s} & \left(\Delta - \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}}\right) \end{vmatrix}. \tag{VIII, 73}$$

Den Vektor Φ erhält man nach der Gl. (VIII, 56) durch Auflösen des Gleichungssystems

$$\overset{\dagger}{\mathfrak{L}}\,\overset{\dagger}{\Phi} = 0, \tag{VIII, 74}$$

da wir vor der Störung den stationären Betrieb mit $\lambda = 0$ angenommen hatten.

Nach der Gl. (VIII, 60) erhält man dann schließlich die Zeitkonstante

$$\delta\lambda = \frac{1}{\int \left(\overset{\dagger}{\Phi^s}\,\Phi^s + \overset{\dagger}{\Phi^{th}}\,\Phi^{th}\right) dV} \int \left(\overset{\dagger}{\Phi^s}\,\overset{\dagger}{\Phi^{th}}\right) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}}\,\delta\, k_\infty \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \Phi^s \\ \Phi^{th} \end{pmatrix} dV = \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}} \frac{\int \overset{\dagger}{\Phi^s}\,\Phi^{th}\,\delta\, k_\infty\, dV}{\int \left(\overset{\dagger}{\Phi^{st}}\,\Phi^s + \overset{\dagger}{\Phi^{th}}\,\Phi^{th}\right) dV}. \tag{VIII, 75}$$

Die Integration ist über das Reaktorvolumen zu erstrecken.

SACHVERZEICHNIS

Abbrand 66, 67
Abbremszeit 7
Abfahren der Reaktorleistung 29
Abschalten eines Reaktors 21
Abschalten eines Reaktors durch Neutronenabsorber 17
Abschalten der Wärmeübertragung 33
Abschaltreaktivität 18, 23
Angereichertes Uran des Spaltstoffes 64
Anteil der verspäteten Neutronen 10
Asymptotisches Verhalten des Neutronenflusses 16
Ausflußfaktor P_S sowohl für prompte als auch für verspätete Neutronen 11
Ausfall der Wärmeübertragungsanlage 33
Die Aufspeicherung der erzeugten Energie eines Reaktors 24

Besselsche Differentialgleichung 131
Besselsche Funktionen 131
~erster Art 132, 135, 137
~zweiter Art 133, 138
~dritter Art 133, 135, 138
~Abbildungen 141, 142
~Differentiation und Integration 140, 142
~Integraldarstellung 134, 135
~modifizierte 137, 138
~Näherungen 138–140
Brennstoffwechsel 71
Brut- und Konversionsvorgänge 50
Brutvorgänge 54

Chemisches Aufbereiten des Brennstoffs 70

Divergenz 105–107, 109, 111
Δ-Operator 109, 110

Eigenwertprobleme 150
~für Matrizen 153, 154
~für Operatoren 150
Einheitsvektor 97
Erschöpfungsgrad der ausgewechselten Brennelemente 71
Exponentieller Abfall des Neutronenflusses 22

Fahrplan eines Reaktors 47
Fourierreihen 122
Fourierintegral 128, 129
~für Besselfunktionen 135–137
~für Kugelfunktionen 146

Gaußscher Satz 104, 105
Generationsschema für den U^{233}–Th^{233}–Brutzyklus 76
Gleichung für das kinetische Verhalten eines Reaktors 13
Gradient 108, 111

Greenscher Satz 112–122
Greensche Funktionen 118–122

Hankelsche Funktionen 133, 134, 135, 138
Hauptachsendarstellung 154
Hochfahren des Reaktors 28
Hochfahren des Reaktors ohne Wärmeentnahme 30

Intermediärer Energiebereich 54
Isotope mit hoher Massenzahl, die bei Brut- und Konversionsprozessen entstehen. 76

Kern 118
Kettenreaktion 7
Konversion 50
Konversionsfaktor C 52
Konversions- oder Brutfaktor 52
Konversionsprozesse 59, 61
Konversionsvorgänge bei natürlichem und bei angereichertem Uran 64
Konversions- und Brutprozeß 61
Konzentration des Ausgangsspaltstoffes 66
Konzentrationsänderungen der Wärmeübertragungsmittel 41
Konzentration der latenten Neutronen 13
Kritische Bedingung 124, 125
Krümmung des Neutronenflusses 89
Kühlstrom 26
Kugelfunktionen 142
~zugeordnete 144, 145

Lebenszeit eines Neutrons 7
Legendresche Gleichung 143
Legendresche Kugelfunktionen 144, 145
Leistungsdichte 65
Leistung eines Reaktors 24

Matrizen 97, 100, 146
~orthogonale 101, 103
~Einheitsmatrix 101
~inverse 101
~adjungierte 103, 155, 156, 157
~selbstadjungierte 103, 155
~hermitesche 155, 156
Mehrgruppentheorie 16
Mittlere Lebensdauer für alle Neutronen 17
Mittlere Reaktortemperatur 24, 87

Nachschub an frischem Spaltstoff 61
Nablaoperator 111
Neptuniumverlust 51
Neumannsche Funktionen 133
Neutronen 10
Neutronenblitz 37
Die Neutronendosis beim Abschaltprozeß 22
Neutronenhaushalt 43

Neutronen, verspätete 7, 10
Normierung 100

Oberflächen-Temperatur der Brennelemente 95
Orthogonalität von Vektoren 99
~einer Matrix 146
~von Eigenvektoren 155
~von Funktionen 125, 127, 145, 147, 148, 149, 151, 152
~von Besselfunktionen 137
Operatoren 146
~hermitescher 152
~selbstadjungierter 152, 153
~adjungierter 153

Plutoniumspeicherprinzip 70–85
Prompt-kritischer Fall 37

Reaktivitätsgewinn 72
Regelvorgänge als „langsame" Änderungen 26
Rotation 107, 108, 111

Schwere Kernisotope von Brut- und Spaltstoffen 81
Selbststabilisierung 24
Selbstregelung der Reaktoren 25
Spaltstoffnachschub 57, 58
Störungsrechnung 113, 157
Stokesscher Satz 107

Temperatureinfluß 23
Temperaturkoeffizienten 23, 24
Temperaturschock 40
Temperaturverteilung an der Brennelementoberfläche 93
Temperaturverteilung des Kühlmediums 92

Vektoren 97
~adjungierte 156
Transformation von Vektoren 100, 146, 150
~von Funktionen 149, 150
Vektoranalysis 104
Verhalten des Reaktors bei Berücksichtigung von 6 Neutronengruppen 19
Verhältnis der prompten Neutronen zu den latenten Neutronen 18
Vermehrungsfaktor 7
Vergiftung eines Reaktors 43
Vergiftung durch schwere Isotope 86
Vergiftung durch stabile Spaltprodukte 47
Vorgänge im Reaktor, die in der Nähe der prompten Kritikalität liegen 21

Wärmeeigenschaften des Reaktors 87
Wärmeexplosion 40

Xe^{135}-Vergiftung 44
Xenonvergiftung nach dem Abschalten 46

Zweigruppentheorie 16, 157, 160
Zylinderfunktionen 129, 133
~Näherungen 138–140
Zahl der latenten Neutronen 18
Zahl der prompten Neutronen 18